2022

# Matematikhistoriske originalkilder, ræsonnementskompetence og GeoGebra på mellemtrinnet

HISTORICAL ORIGINAL SOURCES, REASONING COMPETENCY AND GEOGEBRA IN LOWER SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS

PH.D.-AFHANDLING

MARIANNE THOMSEN

AARHUS UNIVERSITET | DPU

ISBN: 978-87-7507-523-2
DOI: 10.7146/aul.448

# Indhold

# Forord

Ph.d.-projektet var ikke blevet til noget, hvis ikke de deltagende lærere og elever havde åbnet dørene til deres klasselokaler og givet mig mulighed for at afprøve og få indblik i forskellige undervisnings- og læringssituationer. Tak for ideer, forslag til justeringer, spørgsmål og samtaler i forbindelse med de forskellige undervisningsforløb. I det hele taget stor tak for at I ville kaste jer ud i at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra sammen med mig.

En særlig tak til min hovedvejleder Uffe Thomas Jankvist for mange gode, faglige og inspirerende samtaler undervejs i ph.d.-projektet, for stor tålmodighed med at svare på alle mine mange spørgsmål, for vejledning i forbindelse med denne monografi, for et spændende og lærerigt samarbejde i forbindelse med publikationer samt for at åbne muligheder for at møde, høre om, præsentere og diskutere matematikdidaktik i forskellige sammenhænge, fx på konferencer og på møder for os ph.d.-studerende. Min bivejleder Charlotte Krog Skott vil jeg særligt takke for gode, tekstnære og konstruktive kommentarer og vejledning undervejs i processen med at skrive denne monografi.

Jeg havde et oplevelsesrigt, spændende og lærerigt udlandsophold på Florida State University takket være Kathy M. Clark samt de andre imødekommende og hjælpsomme mennesker, jeg var så heldig at møde. Jeg skylder ligeledes Kathy en særlig tak for fagligt inspirerende samtaler og samarbejde i forbindelse med fælles publikationer.

Jeg vil også rette en tak til de studerende, kursisterne og skolerne, jeg har samarbejdet med i forbindelse med den undervisning og vejledning, jeg har stået for på både Aarhus Universitet, DPU og Københavns Professionshøjskole under ph.d.-forløbet. Ligesom jeg vil takke mine tidligere og nuværende kolleger for et godt samarbejde igennem mit arbejds- og ph.d.-liv. De faglige sparringer og diskussioner, jeg har haft og har med jer omkring undervisning, læring, skole og uddannelse, er i høj grad med til at forme og bidrage til mit vedvarende engagement herfor.

Afslutningsvis vil jeg rette en stor tak til Ph.d.-rådet for Uddannelsesforskning samt til Aarhus Universitet, DPU og Københavns Professionshøjskole for at skabe rammerne for gennemførelsen af dette ph.d.-projekt.

*Marianne Thomsen*

*Januar, 2022*

## Resume

Det overordnede formål med ph.d.-afhandlingen er at udvikle et sæt didaktiske principper, der kan understøtte, at elever får mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Dermed placerer ph.d.-afhandlingen sig i spændingsfeltet mellem tre forskningsområder: 1) Matematikkens historie, herunder brug af originalkilder, 2) Digitale teknologier i matematikundervisningen og 3) Matematiske ræsonnementer. Den metodologiske ramme er Design Based Research. Ph.d.-afhandlingen består af tre delundersøgelser: 1) Et review, 2) en analyse af udvalgte kapitler fra et lærebogssystem og 3) planlægning og analyse af tre afprøvninger i praksis. De samles i en diskussion, en konklusion og en perspektivering.

Det teoretiske omdrejningspunkt i afhandlingen er fire teoretiske og/eller analytiske distinktioner. Distinktionen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002) bruges til at synliggøre og kvalificere forskellige facetter af at understøtte elevernes muligheder for at forstå og udvikle matematiske argumenter og ræsonnementer. Misfeldt og Jankvist (2018) karakteriserer hhv. epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende medieringer. De er inspireret af bl.a. Artigue (2002), Hanna (1989), Harel og Sowder (2007), Rabardel og Bourmaud (2003) samt Trouche (2005). De tre former for medieringer Misfeldt og Jankvist (2018) karakteriserer knytter sig til elevernes arbejde med matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser i arbejdet med digitale teknologier i matematikundervisningen. Mellin-Olsens (1984) skelnen mellem regel- og strukturopfattelse bruges bl.a. til at sætte fokus på graden af sammenhænge mellem forskellige matematiske objekter og regler i elevernes argumentationer. Mens distinktionen mellem statisk og dynamisk læsning (Mellin-Olsen, 1984) i ph.d.-afhandlingen retter sig mod elevernes læsning af hhv. originalkilder og GeoGebra. Derudover inddrages Jensens (2011) beskrivelse af termen historisk bevidsthed. I afhandlingen ses der på, om elevernes arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra kan medvirke til at understøtte deres muligheder for at udvikle en historisk bevidsthed, som yderligere kan ses som et middel til at udvide elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med digitale teknologier.

De didaktiske principper består af hhv. et teoretisk og et praksismæssigt bidrag. De didaktiske principper er udviklet på baggrund af afhandlingens tre delundersøgelser og den samlende diskussion heraf. Det teoretiske bidrag er en konstrueret model, der viser, et hensigtsmæssigt

samspil mellem de ovenstående teoretiske og analytiske termer. Det praksismæssige bidrag består af formuleringer af mere konkrete mål, der knytter sig til de forskellige termer i modellen samt af et skema med spørgsmål, ideer og didaktiske opmærksomheder, der kan bruges som mulige afsæt for at planlægge undervisningsforløb, der fokuserer på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. I lyset af det praksismæssige bidrag kan det fremhæves, som vigtigt, at eleverne eksplicit inddrages i, at der lægges op til, at de kan være nysgerrige i forhold til at læse og forstå originalkilden og bruge GeoGebra, og at de selv skal forsøge at formulere matematiske argumenter, som ikke nødvendigvis er de samme som dem i originalkilden.

I lyset af det teoretiske bidrag kan det fremhæves som værdifuldt at udvide Misfeldt og Jankvists (2018) definitioner af hhv. pragmatisk og epistemisk mediering med Niss og Jensens (2002) definition af den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Når der er særligt fokus på at skabe rum for elevernes dynamiske læsning (Mellin-Olsen, 1984), kan det bl.a. også understøtte elevers mulighed for at bruge den produktive side af deres ræsonnementskompetence. I den forbindelse ser lærerens dialoger med eleverne ud til at være afgørende for, elevernes muligheder for at kunne udvikle matematiske argumenter og kæder heraf. Det Mellin-Olsen (1984) kalder strukturopfattelsen kan i planlægningsfasen bl.a. bruges af forskere og lærere til at analysere, hvilke sammenhænge mellem matematiske objekter og regler, der er på spil i originalkilden, og hvordan det giver anledning til at understøtte eleverne i at formulere og forstå ræsonnementer, når de arbejder med GeoGebra. Dertil kommer, at et fokus på strukturopfattelsen og mulige strukturnet formentligt kan være særligt hensigtsmæssigt at bruge som udgangspunkt for en løbende analyse af elevernes dialoger og produkter i forbindelse med deres arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at kunne kvalificere lærernes dialoger med eleverne. Sidstnævnte fik ikke stor opmærksomhed i analyserne undervejs under de forskellige afprøvninger, men i den retrospektive analyse synes det tydeligt at være vigtigt i forhold til at kunne understøtte elevernes arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

## Summary

The overall purpose of this PhD thesis is to develop a set of didactical principles (guidelines), which can support students' possibilities to develop their reasoning competency, when they work with the interplay between original sources and GeoGebra. Thereby this PhD thesis is placed in the intertwinement between three research fields: 1) The history of mathematics, including the use of original sources, 2) Digital technologies in mathematics education and 3) Mathematical reasoning. Design Based Research is the methodological frame of the PhD thesis. The thesis consists of three different sub-studies: 1) A review, 2) Analyses of selected chapters in a textbook system and 3) Planning and analyses of teaching modules. These three sub-studies are combined in a final discussion, a conclusion and further perspectives are drawn.

The analyses in the PhD thesis are based on four different theoretical or analytical distinctions. The distinction between the receptive and the constructive facet of the reasoning competency (Niss & Jensen, 2002; Niss & Højgaard, 2019) is used to support and qualify a visibility of students' possibilities to understand and produce mathematical arguments and reasoning. Misfeldt and Jankvist (2018) characterizes an epistemic, a pragmatic and a justificational mediation. Among others, they are inspired by Artigue (2002), Hanna (1989), Harel and Sowder (2007), Rabardel and Bourmaud (2003) and Trouche (2005). These three types of mediation characterized by Misfeldt and Jankvist (2018) relate to students' mathematical arguments, reasoning and proving, while working with digital technologies. Mellin-Olsen (1984) distinguishes between a rule perception and a structure perception. In the PhD thesis, this distinction is used to focus on to what degree the students' arguments and reasoning build upon related mathematical objects and rules. Mellin-Olsen (1984) also distinguishes between static and dynamic reading. In the PhD study, this distinction is used to focus on the students' reading of the original source and use of GeoGebra. Besides the four different distinctions, Jensen's (2011) description of the term historical consciousness is used to focus on the students' work with the interplay between original sources and GeoGebra, and to what extent it can support their possibilities to develop a historical consciousness. This may be seen as a means for further support of their possibilities to develop the reasoning competency, when they work with digital technologies.

The resulting didactical principles (guidelines) consist of both a theoretical and a practical part. The development of the didactical principles (guidelines) are based upon the three sub-studies and are combined in the final discussion. The theoretical part is a construction of a model,

which visualizes appropriate combinations of the different terms included in the above mentioned theoretical and analytical distinctions. The practical part consists of formulated aims connected to the theoretical model and a scheme including questions, ideas and attention points. These can be used as a possible starting point for researches and teachers, who want to work with teaching modules that focus on the interplay between original sources aimed at supporting the students' possibilities to develop their reasoning competency. Related to the practical part, it can be emphasized that it appears important to explicitly involve the students, allow them to be curious and formulate their own mathematical arguments, while they are reading and trying to understand the the original source while using GeoGebra. Their arguments do not have to be the same as those used in the original source. Students' work with GeoGebra might offer and support other arguments.

In the light of the theoretical part, it can be emphasized, that it seems to be valuable to extend Misfeldt and Jankvist's (2018) definitions of pragmatic and epistemic mediations with Niss and Jensen's (2002) receptive and constructive facet of the reasoning competency. Especially, when focusing on creating space for students' dynamic reading, it seems to have the quality of supporting the students' possibilities to develop constructive facet of their reasoning competency. Here the teacher's dialogues with the students seem essential to support the students' possibilities to develop mathematical arguments and chains thereof. What Mellin-Olsen (1984) calls the structure perception can, while planning a teaching module, be used by researches and teachers to analyze, which structures between mathematical objects and rules are included in the original source, and how these can give rise to support the students' in formulating and understanding mathematical arguments in their work with GeoGebra. Besides, it seems to be valuable to focus on the structure perception and possible structural network in the ongoing analyses of students' dialogues and products related to their work with the interplay between original sources and GeoGebra. Such analyses may qualify the teachers' possibilities to enter into a dialogue with the students and thus further support their possibilities to develop the students' reasoning competency. This aspect did not get much attention in the intermediate analyses in the different teaching modules. Yet, in the retrospective analyses it seem to be an important issue while working with the interplay between original sources and GeoGebra.

# 1. Indledning

Omdrejningspunktet i ph.d.-projektet[1] *Matematikhistoriske originalkilder, ræsonnementskompetence og GeoGebra på mellemtrinnet* er, hvordan der kan fokuseres på samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra på en sådan måde, at det understøtter elevers muligheder for at udvikle deres matematiske ræsonnementskompetence. Det overordnede mål med projektet er at udvikle nogle didaktiske principper, der både har et teoretisk og et praksismæssigt sigte. Principperne funderes i en ramme, der er konstrueret på baggrund af de fire teoretiske og/eller analytiske distinktioner, der er det teoretiske omdrejningspunkt for denne afhandling. De fire distinktioner er:

- Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002).
- Epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018), som bl.a. er inspireret af Artigue (2002), Hanna (1989), Harel og Sowder (2007), Rabardel og Bourmaud (2003) samt Trouche (2005).
- Dynamisk og statisk læsning (Mellin-Olsen, 1984).
- Regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984).

De udfoldes yderligere i kapitel 3 "Teori", hvor de bl.a. sættes i relation til begrebet historisk bevidsthed (Jensen, 2011), som også spiller en central rolle i ph.d.-afhandlingen.

Nærværende kapitel indledes med en beskrivelse af den overordnede problemstilling for ph.d.-afhandlingen samt de tilhørende tre forskningsspørgsmål. Derefter gives et indblik i, hvilke forskningsfelter ph.d.-projektet primært ligger inden for og skriver sig ind i. Kapitlet afsluttes med tre begrundelser for at arbejde med ph.d.-projektet: 1) En forskningsmæssig begrundelse, 2) en undervisningsmæssig begrundelse og 3) en personlig begrundelse. Ph.d.-afhandlingen er baseret på et Design Based Research (DBR) forløb bestående af tre dele: Ét review, én analyse af lærebogssystemet Kontekst+ 4, 5 og 6 samt afprøvninger af undervisningsforløb i praksis. Sidstnævnte består af én pilotafprøvning (0) og to regulere afprøvninger (1 og 2). I afprøvning 0 og 2 var Euklids fem forudsætninger, bog I (Eibe, 1897a), og Euklids sætning 6, bog IV

[1] Undervejs i nærværende ph.d.-afhandling veksles der mellem at bruge betegnelserne ph.d.-projekt og ph.d.-afhandling. Det skyldes, at der er delementer fra afprøvningerne, der af pladsmæssige hensyn ikke kan være med i afhandlingen. Ligesom der undervejs i ph.d.-projektet også har været fokuseret på andre teorier, teoretiske distinktioner og termer end dem, som er endt med at indgå i ph.d.-afhandlingen. Der stræbes efter, at begnelsen ph.d.-projekt bruges, når der refereres mere generelt til ph.d.-projektet samt at betegnelsen ph.d.-afhandling bruges, når der refereres inden for afhandlingens rammer.

(Eibe, 1897b), de originalkilder, der blev arbejdet med. Mens der i afprøvning 1 blev arbejdet med et uddrag af Platons Menon[2] (Rangel-Nielsen, 1906).

Den overordnede problemstilling for ph.d.-afhandlingen lyder:

> Hvilke didaktiske principper kan understøtte, at elever får mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?

De tre forskningsspørgsmål, der knytter sig hertil er:

FS1: Hvordan kan hidtidig forskning bidrage med designmæssige og teoretiske overvejelser i forbindelse med planlægning, gennemførelse og analyse af undervisningsforløb i mellemtrinsklasser med fokus på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?

FS2: Hvilke særlige didaktiske overvejelser rettet mod at understøtte elever i at arbejde med koblingen mellem matematiske ræsonnementer og GeoGebra giver en analyse af udvalgte kapitler fra et lærebogssystem anledning til at være opmærksom på?

FS3: Hvordan kan lærere og elever på mellemtrinnet arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på en måde, der understøtter, at elever kan udvikle deres matematiske ræsonnementskompetence?

I den overordnede problemstilling og FS3 henvises der til Niss og Jensens (2002) definition af ræsonnementskompetence. Samspillet mellem originalkilder og GeoGebra udgør et spændingsfelt, som bl.a. kan medvirke til, at eleverne udvikler det, Jensen (2011) kalder en historisk bevidsthed. I nærværende ph.d.-afhandling ses det som et middel til at understøtte og kvalificere elevernes muligheder for at udvikle en refleksiv tilgang til at arbejde med matematiske ræsonnementer. Det udfoldes i kapitel 3 “Teori” og sættes i relation til de øvrige teoretiske distinktioner og termer, der danner udgangspunktet for det teoretiske afsæt i ph.d.-afhandlingen.

De tre forskningsspørgsmål lægger op til tre forskellige undersøgelser i relation til den overordnede problemstilling.

---

[2] For inspiration til andre, der har arbejdet med Platons Menon som kilde i matematikundervisning, kan nævnes fx Chorlay, 2019; Ebert, Flusser, Kaplan, Kessler, & Sandifer, 2004).

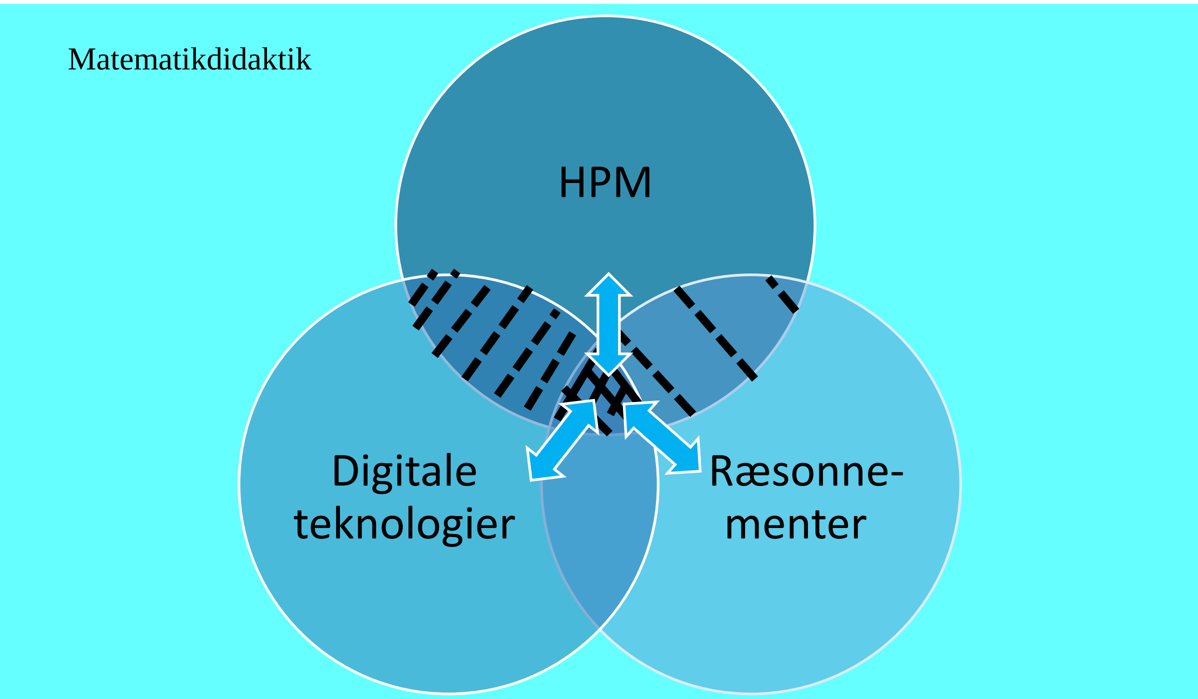
I FS3 indgår både lærere og elever som aktører, der kan medvirke til at understøtte, at eleverne kan udvikle deres matematiske ræsonnementskompetence. Det skyldes, at der i den retrospektive analyse af afprøvning 1 og 2 både er fokus på lærerens rolle, som den der introducerer opgaver og stiller spørgsmål til teksten samt samler op herpå undervejs i afprøvningerne. Der er også fokus på elevernes arbejde i makkerpar eller grupper, samt på elevernes udsagn i fælles dialoger i klassen i forbindelse med introduktioner til eller opsamlinger på opgaver eller spørgsmål. Sidst, men ikke mindst, er der fokus på lærerens og elevernes indbyrdes dialoger undervejs i deres arbejde med de forskellige opgaver.

Arbejdet med de tre forskellige forskningsspørgsmål og revidering heraf har både kørt forskudt og sideløbende med hinanden undervejs i projektet. Derfor er indeværende afhandling et slutprodukt af en sammenfiltret og en gensidig givende arbejdsproces mellem de tre undersøgelser, de tre forskningsspørgsmål hver især har lagt op til.

## 1.1. De tre forskningsfelter

Ph.d.-projektet skriver sig ind i tre forskellige forskningsfelter:

1. Matematikhistorie, herunder brug af originalkilder.
2. Brug af digitale teknologier i matematikundervisningen.
3. Matematiske ræsonnementer og beviser.




*Figur 1: Model – Projektets placering mellem tre forskningsfelter.*

Ph.d.-projektet placerer sig i spændingsfeltet mellem de tre forskningsfelter, men baserer sig ikke på eksisterende forskning i samme grad inden for hver af de tre felter. Dette ses i figuren ved, at "HPM"-feltet (History and Pedagogy of Mathematics) er mørkere end feltet "Digitale teknologier", som igen er mørkere end feltet "Ræsonnementer". Det illustrerer, at der hovedsageligt trækkes på HPM-litteratur, dernæst litteratur fra forskningsfeltet digitale teknologier og mindst på litteratur knyttet til ræsonnementer. Dog er alle tre felter repræsenteret i forbindelse med HPM-litteraturen. Der er ikke meget eksisterende forskning inden for spændingsfeltet mellem de tre felter og der synes ikke at være noget, der fokuserer på lige netop omdrejningspunktet og de teoretiske distinktioner, der er inddraget i denne afhandling. På den baggrund kan det hævdes, at et andet formål med projektet er at bidrage med ny viden inden for spændingsfeltet mellem de tre forskningsfelter.

Nogle af de matematikdidaktiske konferencer, der har relevans for dette projekt er fx HPM-konferencen og ESU (European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education). Dertil kommer konferencer som MEDA (Mathematics Education in the Digital Age) og ICTMT (International Conference on Technology in Mathematics Teaching) i forbindelse med digitale teknologier. Der kan også nævnes mere generelle matematikdidaktiske konferencer som ICME (International Congress on Mathematical Education), CERME (Conferences – European Society for Research in Mathematics Education) og PME (Psychology of Mathematics Education).

## 1.2. Begrundelser

Dette begrundelsesafsnit har tre forskellige udgangspunkter: 1) En forskningsmæssig begrundelse, 2) En praksismæssig begrundelse og 3) En personlig begrundelse.

### 1.2.1. Forskningsmæssig begrundelse

Forskningsmæssigt er projektet interessant set i lyset af de tidligere nævnte forskningsfelter. Den danske matematikdidaktiker Mogens Niss (2007) stiller det retoriske spørgsmål: "Why do we research on the teaching and learning of mathematics?" (Niss, 2007, s. 1293). Hertil svarer han blandt andet, at målet med at bedrive forskning inden for det matematikdidaktiske felt er, at den skal bidrage til at kvalificere matematikundervisning igennem hele uddannelsessystemet, således at elever og studerende kan få mere ud af matematikundervisningen både til deres eget og samfundets bedste. Nærværende ph.d.-projekt retter sig mod mellemtrinnet. Men en yderligere forhåbning er, at resultaterne herfra kan bruges som afsæt til udvikling og forskning i forbindelse med at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra også i det øvrige uddannelsessystem.

Danske gymnasieelever har ofte ikke et udtalt blik for forskellige former for beviser og i den forbindelse deduktive ræsonnementer og aksiomer (Jankvist, 2008). Mange franske universitetsstuderende mislykkes i deres studier, fordi de ikke har kendskab til det matematiske "spil", når det kommer til bl.a. at formulere formodninger, se sammenhænge og mønstre samt udforske og producere formelle beviser (fx Bloch, 2003). I international matematikdidaktisk forskning påpeges det også, at empiriske eksempler ofte er dem, elever lader sig overbevise af (EMS, 2011) og at undervisning, der hovedsageligt lægger vægt på brug af empiriske eksempler forringer elevernes muligheder for at forstå og udføre generelle ræsonnementer og beviser (Harel & Sowder, 2007). Sinclair et al. (2017) påpeger i et survey omkring geometriuddannelse, herunder også brug af nye teknologier, at:

> It appears that the fundamental issue of understanding the need for axioms and for accepting some statements as definitions to avoid circularity has been largely under-researched in the mathematics education community (though see Fujita, Jones, & Miyazaki, 2011; Miyazaki, Fujita, & Jones, 2017). (s. 283)

Umiddelbart kan man sige, at ovenstående i sig selv kalder på studier, der fokuserer på mere generelle ræsonnementer og aksiomatisk bevisførelse. I den forbindelse kan arbejdet med samspillet mellem matematikhistorie, herunder originalkilder, og GeoGebra forhåbentligt bidrage ind i det felt.

Brugen af digitale teknologier stiger generelt i uddannelsesmæssige sammenhænge, hvilket kræver, at både elever, studerende og undervisere ændrer deres praksis og lærer at arbejde inden for den nye teknologiske kontekst (Trouche et al., 2013). Danske lærere ligger helt i top, når det gælder omfanget af deres brug af GeoGebra (Kristensen, 2017), hvilket synes at indikere, det er et program, der bliver brugt en del i en dansk undervisningskontekst. Mogensen et al. (2016) pointerer, at en CAS-adgang ikke i sig selv giver en overordnet effekt på elevernes præstationer i grundskolen, men på mellemtrinnet klarer drenge sig bedre, når de har CAS-adgang. Ligesom for CAS gælder det også for dynamiske geometriprogrammer, at måden, de bliver brugt på i undervisningen, er essentiel for elevernes læringsudbytte (Højsted, 2020 med reference til Jones, 2005). Digitale teknologier bliver i mange uddannelsesmæssige henseender hovedsageligt brugt således, at de får en pragmatisk værdi for de studerende, hvilket vil sige, at de fungerer som et effektivt redskab til at løse en given opgave (Artigue, 2002). Derfor er det også vigtigt at generere forskning, der kan medvirke til en kvalificeret brug af digitale teknologier. En brug hvor der også er fokus på, at de digitale teknologier kan skubbes i en retning, hvor fokus er på at udvikle elevernes matematiske forståelse, altså i en mere epistemisk retning (Artigue 2002; 2010).

Jahnke et al. (2000) fremhæver, at særligt arbejdet med matematikhistoriske originalkilder kan skærpe og berige elevernes matematiske forståelse. Tzanakis og Arcavi (2000) påpeger, at arbejdet med originalkilder kan udvide elevernes opfattelser af og syn på matematikkens karakter som faglig disciplin. Elever og studerendes arbejde med originalkilder kan også bidrage til at understøtte udvikling af deres matematiske kompetencer (Clark, 2015; Jankvist & Kjeldsen, 2011). Hvis man ser ovenstående i lyset af, at vi lever i et samfund, hvor matematik spiller en stadig større rolle også med digitale teknologiers indtog (Johansen & Sørensen, 2020) må det at kunne ræsonnere matematisk, også når man beskæftiger sig med digitale teknologier, ses som en vigtig del af målet med matematikundervisning i grundskolen (jf. Fælles Mål 2019[3] samt i det Tværgående tema "IT og medier" i Læseplanen 2019), både ud fra et samfunds-mæssigt og et personligt perspektiv. Derfor synes det ligeledes at være frugtbart at undersøge samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra nøjere. Når mellemtrinnet er valgt, skyldes det dels, at der ikke findes meget eksisterende forskning herom og dels, at begge dele også var omdrejningspunktet for det speciale, jeg skrev sammen med en studie-makker (Olsen & Thomsen, 2017). Her tog vi bl.a. udgangspunkt i arbejdet med originalkilder og it, som både mål og værktøj (Jankvist, 2009), overblik og dømmekraft (Niss & Jensen, 2002), samt mathemacy (Skovsmose, 1994; 2006; Skovsmose & Nielsen, 1996). Her viste det sig bl.a. at:

> (…) it kan agere dåseåbner for, at det er muligt for elever på mellemtrinnet at arbejde med originalkilder, fordi de med it kan eksperimentere med og afprøve det, der står i originalkilderne. Arbejdet med originalkilder kan ligeledes kvalificere elevernes arbejde med it, således at computerprogrammerne både får en pragmatisk og epistemisk værdi for eleverne. Koblingen mellem matematikhistorie og it kan også understøtte den instrumentelle genese, altså understøtte elevernes instrumenterings og instrumentaliseringsproces i arbejdet med computerprogrammer i den forbindelse. Dertil kommer, at originalkilderne giver mulighed for, at eleverne får en om-matematisk bevidsthed, der bl.a. gør dem opmærksomme på forskellige Black Box situationer. (Olsen & Thomsen, 2017, s. 143)

[3] Igennem ph.d.-afhandlingen bruges blot betegnelsen Fælles Mål. Heri ligger implicit at det er Fælles Mål 2014, der blev gældende i 2015 og senere revidere til den udgave, der er i hæftet for 2019. Der bliver refereret til undervejs, hvis der bruges uddrag herfor.

Derudover syntes det som om, der i mange andre henseender var undervisnings- og lærings-mæssige potentialer i at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på mellemtrinnet, som med fordel kunne undersøges yderligere. Et af dem kunne være i højere grad at fokusere på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnements-kompetence.

Jankvist (2007) argumenterer for at brug af matematikhistorie i undervisningssammenhænge kan ses som et mål i sig selv og have et alment dannende fokus. Her referer Jankvist til Blomhøjs (2001) definition af almendannelse, som refererer til Peters (1980) definition af "almendannelse som almen uddannelse der er relevant for et *liv levet under almindelige betingelser*" (Jankvist, 2007, s. 75). Dertil kommer, at Jankvist refererer til Siu (2000) og citerer:

> Studiet af matematikkens historie, selv om det ikke gør mig til en bedre matematiker, gør mig til en lykkeligere mand, der er parat til at værdsætte den multidimensionale herlighed af disciplinen og dens relation til andre kulturelle bestræbelser. (Siu, 2000, s. 8). (Jankvist. 2007, s. 76)

På den baggrund kan man hævde, at et ph.d.-projekt som dette, hvor det at arbejde med matematikhistoriske originalkilder er ensbetydende med, at der ændres på nogle omstændig-heder i forhold til den gængse matematikundervisning og på den baggrund muligvis gives nye betingelser for at arbejde med noget, som kan bidrage til en personlig udvikling og dannelse som et mål i sig selv. Det er dog ikke hovedformålet med projektet. Derfor træder det heller ikke i forgrunden, hverken i planlægningen eller analysen af de afprøvninger projektet bl.a. bygger på – men det hilses da i den grad velkomment, hvis og når det understøttes hos deltagerne undervejs i projektet.

De fire teoretiske distinktioner, der særligt er i fokus i denne afhandling har forskellige sigter. Distinktionen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002) kan siges at sigte mod arbejdet med matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser. Distinktionerne mellem epistemisk, pragmatisk og retfærdig-gørende medieringer (Misfeldt & Jankvist, 2018) knytter sig til arbejdet med matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser i arbejdet med digitale teknologier i matematik-undervisningen. Distinktionen mellem en regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984) omhandler et mere overordnet syn på matematik, men kan også bruges mere konkret i forhold til analysere sammenhænge mellem forskellige matematiske objekter og regler. Mens distinktionen mellem statisk og dynamisk læsning (Mellin-Olsen, 1984) hovedsageligt retter sig mod læseprocesser. De kan også udvides til at omhandle et historisk og nutidig brug af sprogsystemer, som knytter sig til hhv. originalkilder og GeoGebra (jf. kapitel 3 “Teori”).

### 1.2.2. Praksismæssig begrundelse

Ud fra et praksismæssigt perspektiv er det vigtigt at pointere, at målet med at arbejde med originalkilder i dette ph.d.-projekt ikke er, at eleverne skal bruge samme notationer, argumenter og måder at bevise på som i originalkilderne. Originalkilderne skal medvirke til at give eleverne “another *view* of the landscape of mathematical concepts, techniques, and theorems” (Fried 2011, s. 22) end dem, der præsenteres i deres lærebøger og dem som måske ligger lige for, når de får adgang til at arbejde med GeoGebra. Sigtet er, at elevernes arbejde med originalkilder kan medvirke til at kvalificere deres muligheder for at udvikle mere generelle matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser, baseret på deres arbejde med GeoGebra. Arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra kan næppe betragtes som en gængs og typisk undervisningssituation i en dansk grundskolekontekst. Derfor kan der i sig selv ligge en undervisningsmæssig motivation i at udvikle og undersøge noget nyt i den sammenhæng.

Derudover kan endnu en begrundelse fremhæves, som også er at finde i tidligere omtalte speciale, nemlig at det synes som om, der er en tendens til:

> (…) at modellering er meget fremtrædende og højt prioriteret ift. at udvikle matematikundervisning. Begrundelserne herfor er ofte, at det understøtter elevernes udvikling af demokratisk kompetence. Dette er vi for så vidt ikke uenige i, men vi ser en fare for, at en for ensidig fokusering på modellering i grundskolens matematikundervisning, risikerer at:
>
> 1. underprioritere arbejdet med den rene matematik, (…). (Olsen & Thomsen, 2017, s. 12)

Dette er stadig en vigtig begrundelsesfaktor set ud fra et undervisningsperspektiv. Det er ikke for at nedvurdere arbejdet med modellering i matematikundervisningssammenhænge, snarere tværtimod. Et fokus på at understøtte eleverne i at udvikle deres ræsonnementskompetence i forbindelse med at koble arbejdet med “den rene matematik” og digitale teknologier forestilles også at kunne være med til at kvalificere elevernes arbejde med modellering.

### 1.2.3. Personlig begrundelse

Min personlige begrundelse for at arbejde med matematikhistoriske originalkilder er, at jeg i mit eget arbejde med originalkilder oplever en slags matematisk frisættelse og udfordring, hvor jeg er på opdagelse og skal løse en gåde både sprogligt, matematisk, kulturelt, historisk og filosofisk. I denne sammenhæng gør fx GeoGebra det blandt andet muligt at gøre arbejdet med originalkilder til et mere eksperimenterende arbejde. Jeg kan i høj grad stille hypoteser, hurtigt prøve dem af. Derudover muliggør arbejdet med originalkilder et særligt fokus på det matematiske sprog, jeg har til rådighed, som et arbejdssprog, jeg i højere grad bliver opmærksom på, eftersom det ofte adskiller sig fra det sprog, de begreber og notationer, der bruges i originalkilderne. Første gang jeg havde denne personlige oplevelse med originalkilder var, da jeg selv studerede matematik didaktik på DPU og skulle skrive et overblikspapir til sessionerne i forbindelse med "Matematikkens historie, anvendelse og filosofi i undervisningen" på modulet "Matematikkens didaktik". Her arbejdede jeg med et uddrag af den franske matematiker Francois Viètes (1540-1603) ligningsløsning, som var gengivet i Andersen (1986). Under det arbejde blev jeg bl.a. opmærksom på, at jeg kunne bruge GeoGebra til at undersøge og bedre forstå, hvad der stod i kilden og at sproget i kilden på mange måder var mere "visuelt" understøttet end det matematiksprog, jeg selv var vant til at bruge. Teksten repræsenterede på sin vis både "euklidiske" og "algebraiske" tilgange[4]. På den baggrund fandt jeg, at denne tekst også kunne være velegnet i en nutidig undervisning, eftersom den kunne synliggøre, eksemplificere, at sprog, notionsformer og forslag til løsninger på problemer udvikles over tid, ligesom den kunne bruges som en brobygning fra mere traditionel matematik til at arbejde med CAS og dynamiske geometriprogrammer. Selv brugte jeg sidstnævnte i mit eget arbejde med at forstå teksten. Dertil kom, at jeg også fandt det inspirerende, motiverende og engagerende, at Andersen (1986) introducerede til Viètes liv som matematiker, som indledning til opgaverne og beskrivelser i forbindelse med Viètes ligningsløsning. Arbejdet med at bruge GeoGebra til at forstå Viète og hans ligningsløsning blev på sin vis starten til min personlige interesse for at arbejde med samspillet mellem brug af originalkilder og GeoGebra. Dertil kommer, at min personlige interesse for at arbejde med samspillet også er nært knyttet til mit engagement for udvikling af matematikundervisning i grundskolen. En udvikling, jeg mener, kan kvalificeres på baggrund af relevant forskning knyttet hertil. Min personlige begrundelse omfatter altså også de praksismæssige og forskningsmæssige begrundelser.

### 1.3. Opsamling

Der synes altså både at være teoretiske og praksismæssige begrundelser for, hvorfor nærværende ph.d.-projekt kan bidrage til at kvalificere matematikundervisning. Derfor

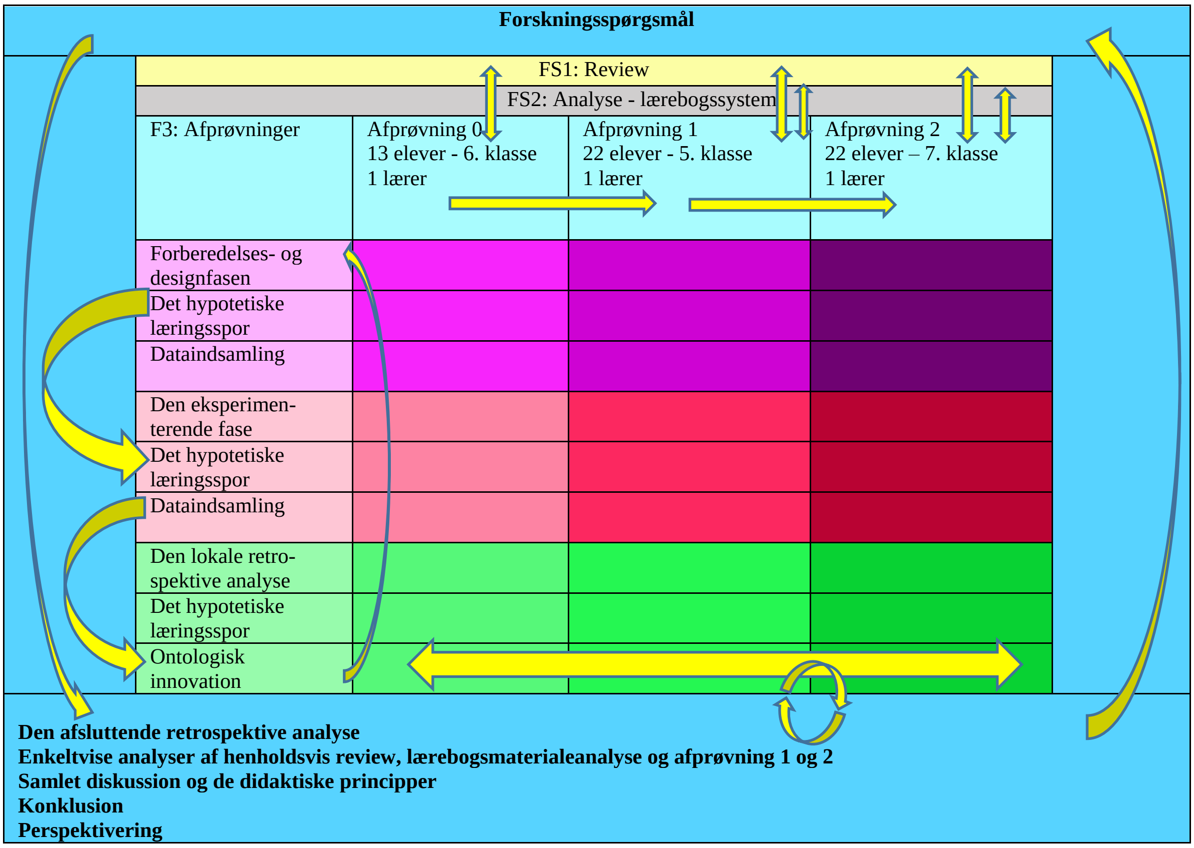
---

[4] Denne skelnen i forhold tilat arbejde med forskellige tilgange blev jeg bl.a. opmærksom på fra Misfeldt (2014)

udmøntes de afsluttende didaktiske principper også både i et teoretisk bidrag og et praksismæssigt bidrag. I det lys kan ph.d.-afhandlingen også bidrage med nye sammensætninger af teoretiske distinktioner inden for samspillet mellem de tre ovennævnte forskningsfelter: 1) Matematikkens historie, herunder læsning af originalkilder, 2) Digitale teknologier i matematikundervisning samt 3) Matematiske ræsonnementer og beviser.

## 1.4. Afhandlingens struktur og læsevejledningen

Nedenstående model i figur 2 viser sammenhængene mellem de forskellige undersøgelser, der er knyttet til FS1, FS2 og FS3. De forskellige begreber inden for DBR udfoldes ikke i præsentationen af modellen. Det bliver de til gengæld i kapitel 4 "Design Based Research – den metodologiske ramme".




*Figur 2: Model – Sammenhænge mellem undersøgelserne knyttet til FS1, FS2 og FS3 i afhandlingen.*

Som der fremgår af pilene i modellen, er der mange forskellige sammenhænge både imellem de tre forskellige undersøgelser og inden for de tre forskellige afprøvninger. Herunder en forklaring tilhørende de forskellige pile.

De dobbeltrettede pile mellem henholdsvis review og de tre afprøvninger samt mellem analyse af lærebogssystem og afprøvning 1 og 2 illustrerer, at arbejdet med de forskellige dele også har spillet ind på hinanden undervejs samt at det afsluttende review og den samlede analyse af lærebogssystemet først kan ses som et færdigt produkt i denne monografi. Analysen af lærebogssystemet startede under afprøvning 1 og har ikke som sådan spillet ind på arbejdet med reviewet. Set i lyset af hele ph.d.-afhandlingen er formålet med reviewet at give indsigt i eksisterende forskning særligt med udgangspunkt i HPM-litteraturen og på baggrund heraf formulere nogle a priori opmærksomheder, både i forhold til det videre teoretiske og praktiske arbejde med både FS2 og FS3. FS2 lægger op til en analyse af et lærebogssystem, der har til formål at fremhæve forskellige opmærksomheder i forhold til at planlægningen af afprøvning 1 og 2.

De enkeltrettede pile imellem de tre afprøvninger illustrerer dels, at afprøvning 0 har spillet ind på arbejdet med afprøvning 1 og afprøvning 1 på afprøvning 2. Derudover er der også dele af afprøvning 0, der direkte har spillet ind på arbejdet med afprøvning 2, eftersom det var den samme originalkilde, der var i spil heri.

De cirkulære pile, der går mellem forberedelses- og designfasen, den eksperimenterende fase og den lokale retrospektive analyse illustrerer, at disse spiller ind på hinanden. Lige såvel som den lokale retrospektive analyse af hver afprøvning spiller ind på planlægnings- og designfasen osv. i den næste afprøvning. Den lange dobbeltrettede pil i feltet "Ontologisk innovation" illustrerer, at denne forfines undervejs i de forskellige afprøvninger, mens de to cirkelrettede pile mellem den ontologiske innovation og den afsluttende retrospektive analyse illustrerer, at den afsluttende retrospektive analyse er foretaget på baggrund af afprøvning 1 og 2. Sidst, men ikke mindst viser de to yderste pile samspillet mellem forskningsspørgsmålene, den samlede diskussion, de didaktiske principper, konklusion og perspektivering.

Afhandlingen består af 9 kapitler. Nedenstående er en kort beskrivelse af, hvad de følgende 8 kapitler handler om.

Kapitel 2 "Review – iscenesættelse og baggrundslitteratur" har et dobbelt formål. På den ene side skal det give et indblik i, hvor nærværende ph.d.-projekt placerer sig i forhold til eksisterende forskningslitteratur inden for spændingsfeltet mellem de tre forskningsfelter: 1) Matematikhistorie, herunder originalkilder, 2) digitale teknologier i matematikundervisningen samt 3) matematiske ræsonnementer og beviser. På den anden side skal reviewet lede frem mod at træffe og begrunde de teoretiske valg, der danner baggrund for lærebogsanalysen og for planlægning og analyse af afprøvningerne.

I kapitel 3 “Teori” udfoldes de fire teoretiske distinktioner og begrebet historisk bevidsthed. I forbindelse med distinktionen den undersøgende og produktive side af ræsonnements-kompetencen tolkes forskellige dele af KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002). De teoretiske distinktioner og begrebet historisk bevidsthed sættes også i relation til Folkeskolens formålsparagraf, Fagets formål og Fælles Mål.

Kapitel 4 “Design Based Research – den metodologiske ramme” giver et indblik i forskellige faser, definitioner og distinktioner med udgangspunkt i udvalgte tekster, der omhandler Design Based Research. De præsenterede faser, definitioner og distinktioner sammenholdes løbende i kapitlet med en beskrivelse af, hvordan de bringes i spil i nærværende ph.d.-afhandling.

I kapitel 5 foretages en analyse af lærebogssystemet Kontext+ for mellemtrinnet. Analysen foretages med udgangspunkt i de fire teoretiske distinktioner og ses i lyset af begrebet historisk bevidsthed og Fagets formål og Fælles Mål for faget matematik på mellemtrinnet. Formålet med analysen er at få blik for didaktiske overvejelser, der kan bruges i forbindelse med planlægningen af afprøvningerne.

I kapitel 6 “Retrospektiv analyse af afprøvninger” gives en retrospektiv analyse af forskellige nedslag fra afprøvning 1 og 2 med udgangspunkt i de fire teoretiske distinktioner og begrebet historisk bevidsthed. De 2 afprøvninger præsenteres som hver deres case, der afsluttes med en præsentation af pointer og fund fra analyserne. Ligesom hele kapitlet afsluttes med en fælles opsamling af pointer på tværs af de to cases samt en opsamling på hvilke teoretiske sammenhænge, der synes at træde særligt frem i den retrospektive analyse.

Kapitel 7 “Diskussion” indledes med et genbesøg til hver af de tre forskningsspørgsmål med henblik på at lede hen til en besvarelse af den overordnede problemstilling i form af didaktiske principper. De didaktiske principper består af en model, der på baggrund af ph.d.-afhandlingens tre delundersøgelser viser hensigtsmæssige sammenhænge mellem termerne fra de fire teoretiske distinktioner og termen historisk bevidsthed. Modellen bliver afsættet for at formulere mere konkrete målsætninger til hver af de enkelte termer, der indgår heri. Afslutningsvist formuleres didaktiske principper i form af spørgsmål, opmærksomheder og ideer, der kan bruges i forhold til at planlægge undervisningsforløb- og opgaver.

I kapitel 8 “Konklusion” samles der op på ph.d.-afhandlingens mest fremtrædende bidrag og fremadrettede opmærksomheder, der kan bruges i en videreudvikling af at fokusere på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

Kapitel 9 “Perspektivering” giver udvalgte bud på, hvordan der overordnet kan arbejdes videre med nogle af de opmærksomheder, der præsenteres i kapitel 7 og 8.

# 2. Review – Iscenesættelse og baggrundslitteratur

Formålet med dette review er at placere ph.d.-projektet i forhold til eksisterende forskning. På den måde kan eksisterende viden danne grundlag for nogle af de didaktiske, metodiske og teoretiske valg, der træffes i forbindelse med udarbejdelse af lærebogsanalyse samt planlægning og analyse af de tre afprøvninger, der tilsammen danner grundlag for udarbejdelsen af de didaktiske principper, der præsenteres i afsnit 7.4 og 7.5. Nærværende review tager udgangspunkt i forskningsspørgsmålet FS1:

> Hvordan kan hidtidig forskning bidrage med designmæssige og teoretiske overvejelser i forbindelse med planlægning, gennemførelse og analyse af undervisningsforløb i mellemtrinsklasser med fokus på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?

Målet med indeværende review er at svare på FS1 samt at give et grundlag for at arbejde videre med dele af hhv. FS2 og FS3 (jf. indledningen til Kapitel 1).

Første afsnit i reviewet indledes med en beskrivelse af og en begrundelse for hvorfor, der er valgt en hermeneutisk tilgang, og hvordan der arbejdes hermed i reviewet. Afsnittet afsluttes med en præsentation af de overordnede emner, reviewet byges op omkring.

## 2.1. En hermeneutisk tilgang – Beskrivelse og begrundelse

Boell og Cecez-Kecmanovic (2010) giver bl.a. følgende beskrivelse af et hermeneutisk review:

> Seeing a literature review as a hermeneutic process makes it evident that there is no final understanding of the relevant literature, but a constant re-interpretation leading (ideally) to deeper and more comprehensive understanding of relevant publications. (s. 130)

Her fremhæver Boell og Cecez-Kecmanovic, at den hermeneutiske proces kan give anledning til nye forståelser, nye tolkninger samt fordre en kontinuerlig dybere forståelse af den relevante litteratur gennem læsning af teksterne i cykliske processer. Boell og Cecez-Kecmanovic (2010; 2014) lægger op til, at et hermeneutisk review hele tiden eksplicitterer en forholdende sig vurderende til teksterne og pointerne heri i forhold til det forskningsspørgsmål, der ønskes besvaret. Sidstnævnte kan som følge af reviewprocessen også ændres undervejs heri.

I følge Boell og Cecez-Kecmanovic (2014) tager et hermeneutisk review udgangspunkt i de indledende ideer, fx et foreløbigt forskningsspørgsmål. Derefter forestår søgning og udvælgelse af tekster gennem forskellige trin, som leder tilbage til forskningsspørgsmålet, en evt. revidering og ny iteration heraf. Boell og Cecez-Kecmanovic (2014) inddeler søgningen og udvælgelsen af tekster i et hermeneutisk review i følgende hovedtrin:

- Søgning – en beskrivelse af søgemetoder der har været taget i brug.
- Sortering af tekster ud fra forskellige kriterier.
- Udvælgelse på baggrund af forskellige til- og fravælgelseskriterier.
- Erhvervelse – en beskrivelse af hvilke tekster, der er tilgængelige fx ud fra et sprogperspektiv.
- Læsning af de udvalgte tekster med notetagning.
- Identifikation af fx centrale termer.
- Raffinering – forfining af literatursøgelsesprocessen på baggrund af det foregående.

Som nævnt ses denne samlede søgeproces, som en iterativproces, der kan køre over flere omgange. Derudover beskriver Boell og Cecez-Kecmanovic (2014) en analyse- og fortolkningscirkel, som skal ses i sammenhæng med ovenstående hovedtrin og primært placeres mellem hovedtrinene "læsning" og "søgning". Analyse- og fortolkningscirklen gennemløbes altså sideløbende med trinene "læsning", "identifikation" og "raffinering". Hovedtrinnene i forbindelse med analyse og fortolkning er ifølge Boell og Cecez-Kecmanovic (2014):

- Kortlægning og klassificering – her klassificeres og beskrives relevante ideer og fund.
- Kritisk vurdering – her vurderes i hvilken grad de forskellige fund er brugbare i forhold til det større forskningsfelt og den eksisterende viden på området.
- Udvikling af argumenter – her udspringer selve reviewet fra, med mindre der tages endnu en tur i de hermeneutiske cirkler ud fra et revideret forskningsspørgsmål. I denne fase trækkes pointer og argumenter frem, som præsenteres og udgør selve reviewet.

Ovenstående er blot en kort beskrivelse af nogle af de hovedpointer, Boell og Cecez-Kecmanovic (2014) fremhæver vedrørende udførelsen af et hermeneutisk review. Med afsæt heri gives en kort begrundelse og beskrivelse af, hvordan denne reviewform bruges i nærværende review.

Den hermeneutiske tilgang til reviewet er valgt, fordi den falder godt i tråd med arbejdet med et DBR-projekt (jf. kapitel 4), som også i sin struktur bygger på cykliske iterationer. Der har således været arbejdet med nærværende review løbende i hele ph.d.-projektet. På den baggrund er der gennemført flere iterationer i forbindelse med de forskellige ovenstående fremhævede hovedtrin, som bl.a. har ført til løbende ændringer af FS1. I dette afsnit gives forskellige indblik i de indledende iterationer, mens der i de efterfølgende afsnit i reviewet hovedsageligt fokuseres på pointer i forhold til at besvare FS1, altså de resultater, der danner grobund for den resterende del af afhandlingen.

En væsentligt karakteristik ved et hermeneutisk review er, at tolkningen og forståelsen hele tiden udspiller sig i en vekselvirkning mellem del og helhed (Boell & Cecez-Kecmanovic, 2010). I dette review lægges der ikke på forhånd et bestemt teoretisk blik på, hvordan forholdet mellem del og helhed kan analyseres, bearbejdes og dermed forstås. Her ses forholdet mellem del og helhed overordnet som en forståelse af en tekstudvælgelse, hvor hver tekst kan betragtes som en del, der spiller ind i den samlede forståelse, og efterhånden som denne har udvidet sig giver det anledning til nye læsninger af de enkelte tekster og pointer heri, som ses som en dybere forståelse af deleelementer af de enkelte tekster, der igen bidrager til en ny samlet forståelse af det udspændte forskningsfelt osv. På et mere konkret plan ses sammenhængen mellem del og helhed som, at de pointer, der fremhæves fra de enkelte tekster (delene), danner grundlag for de opsamlende opmærksomheder, der ses som fund i forhold til at beskrive, hvordan eksisterende forskning kan bidrage med designmæssige og teoretiske overvejelser i forbindelse med planlægning, gennemførelse og analyse af undervisningsforløb i mellemtrins-klasser, hvor der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra (helheden).

### 2.1.1. Søgning, sortering, udvælgelse og erhvervelsesbaggrund

Udvalget af mulige tekster er fremkommet på forskellig vis. I første omgang blev søgemaskinerne ERIC og MathEduc taget i brug. Her søgtes bl.a. på følgende kombinationer af søgeord:

- History of mathematic AND competency
- Reasoning competency AND dynamics geometric environment
- History of mathematics AND ICT
- Classical mathematics AND ICT
- History of mathematics AND dynamic geometry environment

Det viste sig dog hurtigt, at det ikke nødvendigvis var den mest givende søgemetode i forhold til spændingsfeltet mellem forskningsfelterne mellem: 1) Matematikkens historie, herunder originalkilder, 2) digitale teknologier i matematikundervisningen og 3) matematiske ræsonnementer og beviser. Derfor ændredes denne og som beskrevet i kapitel 1 udspringer ph.d.-projektet hovedsageligt fra forskningsfeltet, der knytter sig til brugen af matematikkens historie. Derfor udspringer søgningen af tekster hovedsageligt fra HPM-litteratur (History and

Pedagogy of Mathematics). Her blev fx søgt efter tekster fra ICMI-studiet: “The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics” (Fauvel & van Maanen, 2000), papers og posters fra proceedings fra henholdsvis, CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) og ESU (European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education). Derudover er der inddraget tekster fra peer reviewede tidsskriftsartikler og bogkapitler, hvis de fremstod som relevante referencer i nogle af de tidligere udvalgte tekster. Fælles for den inddragede litteratur er, at teksterne i første omgang er udvalgt på baggrund af titler, dernæst ved gennemlæsninger af abstracts, for til sidst at blive valgt endeligt til eller fra på baggrund af læsninger af hele teksten. Hovedudvælgelseskriteriet har været, at teksterne handler om arbejdet med samspillet mellem matematikhistorie, herunder originalkilder og digitale teknologier. Der er også medtaget tekster, hvor fokus er på brug af originalkilder og kompetencer samt matematikhistorie og mere overordnede dannelsesargumenter i den forbindelse. Tekster er sorteret fra, hvis de handler om at bruge it og matematikhistorie i meget bred forstand i matematikundervisning. Her kan fx være tale om tekster, der handler om hvordan man kan bruge it som søgemaskiner i forhold til at finde tekster, der handler om matematikkens historie eller nedslag i forbindelse hermed. Ligesom tekster, der hovedsageligt omhandler, hvordan brug af matematikkens historie påvirker elevers og studerendes beliefs også er sorteret fra. I alt er dette review skrevet på baggrund 107 tekster. Heraf er nogle af teksterne medtaget, fordi de fremstår som referencer i forhold til særlige udvalgte pointer i forbindelse med nogle af de overordnede emner, der præsenteres senere i dette afsnit og danner rammen for det resterende review. Det drejer sig om 36 af de 107 tekster.

Nogle af de tekster, der præsenteres i reviewet er skrevet undervejs i ph.d.-projektet. Det gælder fx konferencepapers, som jeg selv er forfatter eller medforfatter på. Det betyder fx, at introduktionen af Mellin-Olsens (1984) skelnen mellem måder at forstå regler på bliver præsenteret i reviewet som eksempler på små delpræsentationer af ph.d.-projektet undervejs i projektforløbet, samtidig med, at de yderligere medvirker til at danne grundlaget for udvælgelsen af de teoretiske distinktioner, der arbejdes videre med her i afhandlingen.

Ud fra et erhvervelsesbaggrundsperspektiv kan nævnes særligt to perspektiver:

1 Tidsperspektivet – der er medtaget tekster fra 1980’erne frem til 2021. Det skyldes bl.a., at Arcavi et al. (1982) er en af de første empiriske tekster, der handler om, hvordan der kan arbejdes med matematikhistorie i undervisningspraksis på en hensigtsmæssig måde (Jankvist et al. 2015).

2 Sprogperspektivet – der er kun medtaget engelsk eller nordisksproget litteratur. Det er på trods af, at jeg ved, at Arzarello og kolleger har arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på italiensk, og at der inden for IREM (Institute of research on the teaching of mathematics) i Frankrig findes materialer på fransk, der kunne have været interessant for nærværende ph.d.-projekt. Nogle af ideerne herfra er medtaget, eftersom de også er præsenteret i fx konferenceproceedings på engelsk.

### 2.1.2. Kortlægning og klassificering – De indledende interationer

Som beskrevet tidligere er dette review blevet til på baggrund af flere iterationer. I første omgang blev teksterne forsøgt klassificeret og kategoriseret efter, hvad de indholdsmæssigt helt overordnet omhandler. Her udledtes 4 kategorier:

- Matematikhistorie, ræsonnementer og mere overordnede dannelsesmål
- Originalkilder, kompetencer og ræsonnementer
- Matematikhistorie og digitale teknologier
- Originalkilder og digitale teknologier

Nogle af teksterne var svære at kategorisere, eftersom det ikke entydigt fremgår, om de enten tager udgangspunkt i arbejdet med originalkilder eller matematikhistoriske problemstillinger. Dertil kommer, at nogle af teksterne egentligt tager udgangspunkt i et mere overordnet matematikhistorisk perspektiv og så undervejs eksemplificerer noget ved at give eksempler på brug af originalkilder. Andre tekster tager udgangspunkt i et arbejde med originalkilder, men dette nævnes implicit og selve kilderne fremgår ikke tydeligt af teksten. Derfor forsøgtes en ny inddeling af teksterne efter typer af studier (inspireret af Jankvist, 2009). Det gav anledning til følgende kategoriseringer:

- Empiriske studier – forskningskarakter
- Deskriptive forløb, der er afprøvet i praksis – udviklingskarakter
- Tekster, der advokerer for brug af hhv. matematikhistorie og/eller originalkilder samt samspillet mellem disse og digitale teknologier – undervisningspolitisk/påvirknings karakter

I første omgang afgrænsedes kategorien "Empiriske studier" af, om teksterne tog udgangspunkt i et forskningsspørgsmål. Dette viste sig dog alligevel ikke at være tilstrækkeligt, eftersom flere af teksterne også her er svære at kategorisere. Flere tekster tager ikke udgangspunkt i konkret formulerede forskningsspørgsmål, men beskriver en systematisk undersøgelse med metodiske overvejelser, indsamling og bearbejdning af data samt fremlæggelse af resultater. Dertil kommer, at flere af disse systematiske undersøgelser er casestudier af fx et enkelt forløb i en klasse eller ift. enkelte udvalgte elever/studerende. Derfor blev overgangen på sin vis også flydende til de studier, der var kategoriseret som deskriptive forløb afprøvet i praksis. De vurderedes således i højere grad at have et udviklingsøjemed end et forskningsøjemed. Med andre ord, flere tekster befandt sig i en gråzone imellem de to første kategorier. Den sidste kategori indeholdt tekster, der ikke baserer sig på empiriske eksempler, men som hovedsageligt ud fra et teoretisk perspektiv advokerer for brug af matematikhistorie og/eller originalkilder. Disse kategoriseringsudfordringer gør, at dette ikke er kategoriseringer, der konsekvent fremhæves i de følgende afsnit.

Den sidste af de indledende kategoriseringer var basseret på uddannelsestrin. Her blev teksterne inddelt efter, om de hovedsageligt omhandlede:

- Mellemtrin
- Udskoling
- Gymnasium
- Universitet/læreruddannelse
- Efteruddannelse/workshops for praktiserende undervisere
- Hele uddannelsessystemet

Universitet og læreruddannelse er slået sammen, fordi læreruddannelsen i mange andre lande end Danmark er en universitetsuddannelse. Igen syntes det ikke helt enkelt at inddele teksterne, eftersom nogle af teksterne omhandlede flere uddannelsestrin. Dog syntes det klart, at der var flest tekster, der rettede sig mod gymnasiet, universitetet og hele uddannelsessystemet. Derefter kom mellemtrinnet, så udskolingen og der var færrest tekster, der rettede sig mod praktiserende undervisere. Umiddelbart synes ingen af teksterne at rette sig mod hverken indskolingen eller førskole, ej heller mod særlige erhvervsuddannelser.

Det syntes altså ikke så enkelt endda at inddele teksterne ud fra ovenstående kategoriseringer, hvilket kan indikere, at de tekster, der indgår i reviewet har forskellig karakter både i forhold til indhold, men også i forhold til analytisk tilgang og stringens. Når det er sagt, så indeholder teksterne forskellige bud på udfordringer og potentialer, når der arbejdes med: 1) matematik-historie, 2) originalkilder og 3) matematikhistorie, herunder originalkilder i samspil med digitale teknologier. Selvom teksterne omhandler forskellige uddannelsesmæssige trin, synes mange af pointerne omkring udfordringer og potentialer også værd at tage med i de didaktiske valg, der præsenteres efterfølgende i afhandlingen og kobles til arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på mellemtrinnet. Derfor fremhæves uddannelsestrin i det følgende kun, når det vurderes, at det særligt underbygger en pointe fra en tekst. Dog skelnes der mellem brug af ordene elever og studerende, hvor elever bruges i forbindelse med pointer fra den litteratur, der retter sig mod grundskolen, mens studerende bruges, når litteraturen enten kun omhandler uddannelsestrin efter grundskolen, eller hvis teksterne retter sig mod hele uddannelsessystemet.

### 2.1.3. Kortlægning og klassificering, kritisk vurdering og argumentation

Den fjerde opdeling knytter sig til den sidste iteration og dermed den formulering af FS1, som er en del af denne afhandling. Den er fremkommet på baggrund af de første læsninger af teksterne i forbindelse med ovenstående kategoriseringer. Under disse læsninger syntes følgende opdeling af emner at kunne understøtte en besvarelse af FS1:

- Begrundelser for at bruge matematikhistorie
- Begrundelser for at bruge originalkilder
- Samsspillet mellem matematikhistorie, herunder originalkilder og digitale teknologier
- Opgave- og forløbsdesign
- Lærerens særlige rolle

Disse emner udgør hver især overskrifterne på et afsnit i reviewet. De er som sådan ikke udtryk for en kategorisering af teksterne, men de udgør en overskrift, hvorunder forskellige pointer fra teksterne præsenteres. På den baggrund er de efterfølgende afsnit i reviewet basseret på en kritisk vurdering af de forskellige pointer fra forskellige tekster i forhold til at besvare FS1. Derfor vil der også blive henvist til nogle af teksterne flere gange, hvis forskellige pointer herfra relaterer sig til hver deres emne, hver deres afsnit i reviewet. Hvert afsnit indledes med en kort introduktion. Derefter en præsentation af de forskellige pointer og afslutningsvist en kort opsamling på særlige opmærksomheder, der bidrager til designet af og den retrospektive analyse af afprøvningerne. De korte opsamlinger tilknyttet hvert afsnit og den sidste afsluttende opsamling på hele reviewet anses i dette review for at tilhøre det trin af reviewprocessen, Boell og Cecez-Kecmanovic (2014) kalder argumenter.

## 2.2. Begrundelser for at bruge matematikkens historie

I dette afsnit præsenteres forskellige pointer fra tekster, der omhandler begrundelser for og udfordringer ved at bruge matematikhistorie i undervisningen.

Jankvist (2007; 2008; 2009) opererer bl.a. med en opdeling imellem at bruge matematikhistorie som værktøj og som mål. Ifølge Jankvists skelnen bruges matematikhistorie som et værktøj, når der i undervisning fokuseres på at understøtte elevernes eller de studerendes læring af matematiske teorier, begreber, metoder, discipliner m.m. Når historie bruges som mål fokuseres der på at understøtte en udvikling af eleverne eller de studerendes metaperspektiv på faget. Her ses historie som et mål i sig selv og retter sig mod en forståelse af matematik som en disciplin. Jankvist bruger ydermere betegnelserne *in-isssues* i forbindelse med værktøjs-perspektivet og *Meta-issues*[5] i forbindelse med målperspektivet. Jankvist indfører denne analytiske skelnen mellem værktøj og mål som en analytisk skelnen, der kan kvalificere sproget omkring og dermed argumenterne for, hvorfor det er værdifuldt at arbejde med matematikkens historie i en uddannelsesmæssig sammenhæng. Nogle af teksterne, der indgår i reviewet, er skrevet før Jankvist italesatte disse analytiske distinktioner, og nogle af teksterne refererer til distinktionerne og giver udtryk for et aktivt valg enten i forhold til at vælge at arbejde ud fra enten historie som mål eller som værktøj eller som begge dele. Fried et al. (2016) fremhæver med reference til Jankvists (2009) distinktion mellem historie som mål og som værktøj, at det at læse en originalkilde kan uddybe den matematiske forståelse på begge niveauer, både i forhold til at udøve og lære matematik samt i forhold til at reflektere over matematik.

Radford et al. (2007) fremhæver, at en af grundene til at bruge matematikhistorie i uddannelsesmæssige sammenhænge kan være følgende:

> History allow us to overcome Narcissus' position one in which he could only see himself as someone reflected in the mirror of his own ego. (s. 109)

Radford et al. Mener altså, at matematikhistorie kan gie et horisont udvidende perspektiv både ud fra et mål og et værktøjsperspektiv. Fauvel (1991) fremhæver bl.a. at brug af matematikkens historie kan medvirke til at ændre elevers forståelse af matematik, understøtte dem i at sammen-ligne gamle og moderne etablerede værdier af moderne teknikker samt, at brugen af matematik-kens historie kan lede til matematiske diskussioner, som handler om matematik i samfundet ud fra et kulturelt perspektiv. Disse begrundelser synes at falde godt i tråd med en opfattelse af, at brugen af matematikkens historie i matematikundervisning kan give de studerende et større udsyn og danne grundlag for refleksioner omkring dem selv i lyset af et historisk blik. Fried

[5] Jankvists brug af in-issues og meta-issues er inspireret af begreberne om-, i- og med-matematik, som er kategoriseringer hentet fra IMFUFA fra RUC.

(2007) beskriver med henvisning til Saussure forskellen på vidensformer, når det kommer til historie versus matematik:

> (…) namely, that between genuinely different ways of knowing: historical vs. mathematical (Fried and Unguru, 2001; Unguru, 2004), or, borrowing from Saussurean semiotics (Saussure, 1974), diachronical vs. synchronical (Fried, 2004) epistemologies. But I want to emphasize also that these epistemologies ought not be taken as competing, as it were, but as complementary. (Fried, 2007, s. 204)

For at forklare denne komplementaritet tager Fried (2007) udgangspunkt i Saussures (1974) tegnsystem og her mere specifikt i en skelnen mellem en synkron beskrivelse (fungerende sprogsystemer) og en diakron beskrivelse (beskrivelse af sprogets historiske udvikling). Med afsæt heri skriver Fried (2007), at processen fra at gå fra vores egen nuværende matematik, gennem historien og så tilbage til vores egen nuværende matematik kan ses som en bevægelse mod en matematisk selvforståelse, en slags matematisk væren, en egen selvforståelse af at være et matematisk væsen. Der er ingen grund til at tro, at de teknikker og tilgange, der bliver undervist i i nutidige klasserum altid vil være de mest magtfulde veje til at løse problemer i den moderne verden (Fried, 2001). Fried (2001) gør med henvisning til Butterfield (1931/1951) brug af begrebet “Whig” history, som betyder, at historien bliver brugt som en årsags-virkningsforklaring – forstået således, at ting i nutiden kan forstås og begrundes med direkte henvisning til fortiden. Fried advarer mod en sådan historiebrug. Når man arbejder med matematikhistorie i uddannelsesmæssige sammenhænge, vil det altid være et spørgsmål om fortid, nutid og fremtid (Fried, 2001). Kjeldsen et al. (in press) plæderer for at tage udgangspunkt i et historiesyn, som Jensens (2011) beskrivelse af en historisk bevidsthed, der handler om en bevidsthed om at befinde sig i spændingsfeltet mellem fortid, nutid og fremtid. I sådanne tilgange til arbejdet med matematikkens historie ligger også, at de åbner for, at eleverne kan arbejde med og få blik for forskellige løsningsstrategier. Disse begrundelser kan både anvendes, når man arbejder med matematikhistorie ud fra et mål- og fra et værktøjs-perspektiv. Alle de ovennævnte begrundelser kan siges at knytte sig til en både historisk, kulturel og filosofisk tilgang til at arbejde med matematikhistorie i matematikundervisning. Om denne sammenhæng skriver Clark et al. (2016) bl.a:

> In this wider context, history and epistemology of mathematics have an additional important role to play in providing a fuller education of the community: not being a natural science, but a formal science closer to logic—hence to philosophy—mathematics has the ability inherent in itself to connect the humanities with the sciences. (Clark et al., 2016, s. 136).

Hong og Wang (2015) udførte et studie i en 6. klasse, hvor der var fokus på at bruge matematikhistorie til både at introducere eleverne til Keplers personlige historie og som metode til at finde arealet af en cirkel. Hong og Wang (2015) konkluderer bl.a., at brugen af historiske materialer kan medvirke til at kreere undervisningssituationer, der gør det muligt for eleverne at få indblik i udviklingen af essentielle dele af matematikken, forstærke deres forståelse og understøtte en udvikling af deres problemløsningsevne bl.a. ved hjælp af passende computer-støttet undervisning.

På baggrund af et gennemført pilotstudie, hvor 82 % af 360 undervisere på 41 skoler bl.a. svarede på spørgsmål omkring i hvor høj grad, de værdsætter matematikkens historie og om de har læst om den, peger Siu (2006) bl.a. på, at lærere værdsætter matematikkens historie, men ofte ikke tager initiativ til at bruge den i deres undervisning. Endvidere konkluderer Siu (2006) på baggrund af de undersøgelser, han har læst om brugen af matematikhistorie, at det ofte fremhæves, at brugen af matematikkens historie har en positiv effekt på den affektive side, og at der ikke er studier, der fremhæver, det samme gælder for den kognitive side. Han påpeger endvidere, at det ikke nødvendigvis er sådan, at studerende klarer sig bedre i tests, efter de i korte forløb har arbejdet med matematikkens historie, men formentligt kan man se nogle fordele for de studerende ved at arbejde med matematikkens historie på den lange bane, bl.a. i form af, at de studerende ser det at lære matematik som mere meningsfuldt, og at det vil være nemmere at arbejde med matematisk stof og give anledning til en dybere læring. Han fremhæver ydermere, at en bevidsthed herom hos lærerne bl.a. kan gøre lærere mere tålmodige og mere humane (Siu, 1997/2000). Lim og Chapman (2015) viser på den ene side, at studerende klarede sig bedre i matematiske aktiviteter lige efter samt i et år efter at have deltaget i en intervention, der fokuserede på brug af matematikkens historie. På den anden side havde nogle studerende en negativ tilgang til arbejdet med matematikkens historie, fordi de ikke direkte kunne se et sådant arbejde som relevant for deres eksamener og én studerende foreslog, at matematikkens historie blev en del af deres eksamener.

I lyset af en dansk uddannelsesmæssig kontekst kan det fremhæves, at elever og studerende får mulighed for at arbejde med en mere filosofisk vinkel, når der tages udgangspunkt i de tre former for overblik og dømmekraft[6] i arbejdet med matematikhistorie, herunder originalkilder (fx Jankvist & Iversen, 2014). Jankvist (fx 2010; 2011, 2013) påpeger, at det kan være frugtbart

[6] Her henvises til Niss & Jensens (2002) definitioner heraf i KOM-rapporten, som yderligere beskries i kapitel 3 i nærværende afhandling.

at arbejde med forløb, der primært fokuserer på historie som mål og viser, at arbejdet med matematikhistorie, herunder originalkilder, kan give anledning til en nuanceret og bred evaluering af, hvad eleverne har fået ud af forløbene. Han fremhæver bl.a., at det kan være i form af essays.

### 2.2.1. Opmærksomheder omkring brugen af matematikkens historie

Pointerne i ovenstående afsnit er ikke knyttet til at arbejde med samspillet mellem matematikhistorie og digitale teknologier, men er alligevel værd at indtænke i forhold til at arbejde hermed. De opmærksomheder i forhold til potentialer og udfordringer, der tages med i det videre arbejde er, at matematikhistorie kan bruges med det for øje, at eleverne får muligheder for:

- at se, at den måde de sædvanligvis arbejder med matematik, ikke er den eneste måde, det kan gøres på.
- at reflektere over, at teknikker benyttet i originalkilder og nutidige teknikker kan ses i lyset af et semiotisk perspektiv, hvor sprogsystemers nutidige og udviklingsmæssige beskrivelser har betydning for de muligheder, der ligger heri. Her muliggøres et spændingsfelt, som ikke skal ses som en årsags-virknings-række, men som et spændingsfelt, der kan understøtte eleverne i at være kreative "matematiske væsner".
- at indgå i diskussioner af mere filosofisk og kulturel karakter i forhold til at understøtte deres muligheder for at udvikle ræsonnementskompetencen. Med andre ord kan der fokuseres på historie som værktøj og herigennem på historie som mål.

## 2.3. Argumenter for at bruge originalkilder

Dette afsnit indledes med en beskrivelse af den eksisterende litteraturs særlige argumenter for at bruge originalkilder i matematikundervisningen. Derefter præsenteres eksempler på forskellige læsestrategier, der kan understøtte elevers og studerendes læsning af originalkilder. Afslutningsvist fremlægges udvalgte pointer fra tekster, der fokuserer på mellemtrinnet.

Jahnke et al. (2000) pointerer på baggrund af flere empiriske studier rettet mod forskellige uddannelsestrin, at studerende både kan berige og skærpe deres matematiske forståelse bl.a. i forhold til ræsonnementer, når de arbejder med originalkilder ud fra et hermeneutisk perspektiv, hvor der hele tiden veksles mellem del og helhed samt fortid og nutid, selvom det er klart, at læreren spiller en vigtig rolle i sammenhæng hermed. Arbejdet med originalkilder har også potentiale til at understøtte elevers og studerendes udvikling af matematiske kompetencer

(Clark, 2015; Jankvist & Kjeldsen, 2011) samt deres syn på matematiske aktiviteter og på matematik som disciplin (Tzanakis & Arcavi, 2000). Tzanakis og Arcavi (2000) foreslår, at dette kan understøttes ved fx at arbejde med parallelpostulatet, da det bl.a. kan rejse diskussioner omkring “more general meta-mathematical themes; on what is meant by proving a proposition, or what is it to make a correct mathematical assertion” (s. 228). Derudover kan studerende under deres arbejde med originalkilder også lære om “the importance of definitions, proofs and mathematical structure” (Arcavi et al., 1982, s. 33). Ifølge Smestad (2011b) er det vigtigt at lade lærerstuderende og lærere arbejde med, hvordan arbejdet med matematikkens historie kan være med til at kvalificere matematikundervisningen, så et sådant arbejde ikke blot ender med kun at inkludere anekdoter og biografier. Her mener han, brug af originalkilder kan være en mulighed. Udover ovenstående argumentationer for at arbejde hermed i undervisningen i forhold til at kvalificere de studerendes læring, præsenterer Arcavi og Isoda (2007) et studie, der viser, at arbejdet med originalkilder også kan medvirke til at udvikle lærerstuderendes og læreres kompetencer til at lytte til deres studerende og elever.

Der er flere forskellige tilgange til at arbejde med originalkilder, men flere tekster fremstiller det som værdifuldt at fokusere på, at originalkilderne præsenterer en anden matematisk diskurs end den, eleverne eller de studerende er vant til. Det kommer bl.a. til udtryk, når Can et al. (2018) pointerer, at arbejdet med originalkilder kan give elever og studerende muligheder for at deltage i forskellige matematiske diskurser og dermed understøtte deres læring af matematiske objekt- og meta-niveau-regler. Her refererer de til Sfards (2008) teori om “commognition”, tænkning som kommunikation. Mennesker kommunikerer både intrapersonelt og i forskellige fællesskaber. Inden for teorien om commognition anses matematik som en diskurs, der indeholder både object-level rules og metarules:

> In mathematics, the relevant metarules are those that govern the activity of proving. More generally, object-level rules are narratives about regularities in the behavior of objects of the discourse, whereas metarules define patterns in the activity of the discursants trying to produce and substantiate object-level narratives. (Sfard, 2008, s. 201)

Kjeldsen og Blomhøj (2012) henviser også til Sfard (2008) og lægger vægt på, at arbejdet med originalkilder kan lægge op til, at der kan opstå commognitive konflikter for de studerende, når de møder forskellige matematiske diskurser. De commognitive konflikter anses inden for denne teoriramme for at kunne være et afsæt for læring. Jankvist (2010) beskriver ligeledes med henvisning til Sfard:

> Sfard then roughly reasons that mathematics is a way of thinking, thinking is a form of communication, communication is a discourse, and therefore mathematics is itself a discourse. Thus, if thinking is what changes when one understands or learns, this means that understanding or learning mathematics is the same as changing the discourse (Sfard, 2008a). (Jankvist, 2010, s. 63)

Her fremhæver Jankvist (2010) vigtigheden af at bringe forskellige diskurser i spil i matematik-undervisning for at understøtte elevernes forståelse og læring. Dertil kommer, at Jankvist og Kjeldsen (2011) identificerer potentielle forankringspunkter mellem meta-issues og in-issues[7] og viser relevansen heraf i arbejdet med at understøtte studerendes bevidsthed om og forståelse af forskellige måder og forudsætninger for at kunne arbejde med argumentationer og beviser.

Flere tekster har fokus på selve det at læse originalkilder, fordi det i sig selv kan være en udfordring at læse det gamle sprog og samtidig arbejde med forskellige matematiske ideer, teoremer osv. Nogle af læsestrategierne præsenteres som følger:

- Jahnke et al. (2000) og Fried et al. (2016) plæderer for at bruge en hermeneutisk tilgang i forbindelse med at læse og arbejde med originalkilder. Her lægges der vægt på at understøtte de studerendes arbejde med originalkilder ved både at give dem opgaver, der udvider deres forståelse og sætter dem i situationer, hvor de skal reflektere over kontrasten mellem historiske og nutidige begrebsforståelser. Med disse opgaver søges det at udfordre de studerende til at:

  > (…) think oneself into the situation of persons living at a time long ago requires to be able to argue from the assumptions of these persons, to use their symbols and methods of calculation. This poses completely new demands on the students' abilities to argue and to prove mathematically. (Fried et al., 2016, s. 218)

- Barnett et al. (2014) er bl.a. med reference til Jahnke et al. (2000) ligeledes fortalere for og brugere af en hermeneutisk tilgang samt brug af Sfards teori om læring som kommunikation i deres arbejde med læsning af originalkilder i matematikuddannelsesøjemed. Barnett et al. (2014) kalder den tilgang, de beskriver for "guided reading", guided læsning. Den baserer sig på nogle særligt tilrettelagte moduler, der gennem veltilrettelagte opgaver har fokus på matematikkens historie og læsning af originalkilder. Disse moduler sætter scenen for en fleksibel klasserumsbrug, hvor de studerende ses som aktive aktører, der via en "read,

[7] Sfards definition af object-level rules og metarules ligger hovedsageligt inden for det, Jankvist kalder in-issues, mens meta-issues hos Jankvist også kan siges at række udover Sfards definition af metarules. Meta-issues kan have en mere almendannelsesmæssig karakter og være et mål i sig selv (se fx Jankvist, 2007).

reflect, respond"-strategi fordres til at gå i interaktion med teksten via forskellige givne opgaver. Opgaverne, de studerende arbejder med i disse moduler, knytter sig bl.a. til forskellige tekststeder i originalkilder. Disse sættes ind i historiske sammenhænge undervejs. Tanken bag opgaverne er at understøtte, at de studerende får mulighed for at:

> (…) develop their own understanding of concepts and theory, and to reflect from the primary source on the evolution of standards of rigor, and of the nature of proof, definitions, notation, terminology, etc. (Barnett et al., 2014, s. 10)

Barnett et al. (2014) beskriver flere mål med at arbejde med originalkilder. To af dem præsenteres således:

> Recasting this discussion in linguistical language from Saussure (1974) that has been studied by Fried (2007), one goal of a hermeneutical reading of primary sources is to understand the diachronic development of topics in modern mathematics, i.e., their development across time. Another of our overarching goals is to develop and improve students' ability to create and articulate mathematical arguments. (Barnett et. al, 2014, s. 23)

- Chorlay (2019) beskriver et arbejde med Platons tekst "Menon" afprøvet i en 5. og 6. klasse, der også er inspireret af en hermeneutisk tilgang. Her beskriver han med reference til Cèbe og Goigoux (2009) bl.a. forskellige læsestrategier, der kan bruges i et arbejde med at læse historiske tekster med elever på disse klassetrin. De læsestrategier, Chorlay (2019) præsenterer, har fokus på, at eleverne skal være aktive og understøttes i at blive i stand til at regulere deres egen læseproces. Derfor skal man undgå lange lister af detaljerede spørgsmål, men i stedet spørge til elevernes egne grader af forståelse. Man skal undervise eleverne i, at der er forskel på, hvad teksten siger, og hvad det giver anledning til, at læseren kan udlede heraf. I den forbindelse pointeres det, at alle har deres egen måde at forstå en tekst på, men at man også skal sigte mod en fælles forståelse af teksten i klassen. Eleverne kan blive sat til at reflektere over matematikerens karaktertræk i form af tanker, motiver, følelser og bevæggrunde i forhold til personens viden og ræsonnementer. Eleverne kan lære at huske og give teksten mening ved konstant at reformulere og omskrive teksten. Chorlay (2019) påpeger endvidere, at det er vigtigt, at formålet med at læse teksten er tydeligt for eleverne, fordi de dermed har mulighed for at vælge læsestrategier, der passer hertil. Læreren kan forklare ordene i teksten både før og efter, men eleverne skal have muligheder for at se, at læseren kan opstille hypoteser i forbindelse med teksten og nye ord. Som opsamling på sine forslag til tekstlæsningsstrategier skriver Chorlay:

> In summary, beyond the specific content-related goals (shapes, area, proportionality), we wanted students to experience argumentation in a mathematical context, by reading – but also by reformulating, complementing, assessing, or providing – arguments. Since the opportunity to do this was provided by a long and difficult text, these *meta*-tasks were intertwined with less specific – but just as challenging – text-reading tasks. (Chorlay, 2019, s. 408)

De tre ovenfor beskrevne læsestrategitilgange er overordnet inspireret af en hermeneutisk tilgang til at arbejde med matematikhistorie, herunder originalkilder. Den hermeneutiske metode leder studerende hen imod bedre resultater i deres matematiske formåen (Glaubitz, 2010), og det understøtter også et højere niveau af undervisning, hvor de studerende gives både ansvarlighed og frihed. Ifølge Glaubitz (2010) kan denne tilgang “arouse the students' epistemic curiosity” (s. 358).

Med reference til Bussis (2000) arbejde med at både gamle og nye redskaber indeholder matematisk viden, som kan blive synligt gennem studier, gennemfører Deligianidis og Nikolantonakis (2019) et studie i en 6. klasse, der fokuserer på at studere og rekonstruere redskaber baseret på historiske kilder og som har til formål at understøtte eleverne i at udvikle deres forståelse af proportionalitet. De brugte den historiske kilde som afsæt til, at eleverne kunne konstruere et redskab, forklarer de:

> Then, we presented a translated excerpt of the historical text, entitled *La géométrie et pratique générale d'icelle*, (Errard, J., 1594) which describes an instrument suitable for measuring inaccessible distances. The pupils constructed a similar instrument, according to the instructions of the text and used it during their experimental work to discover the properties of Proportions of the similar triangles formed via the use of the tool. (Deligianidis & Nikolantonakis, 2019, s. 305)

Eleverne brugte disse måleredskaber til at måle med i skolegården. Efterfølgende diskuterede de bl.a. deres resultater i klassen og sammenlignede disse. Deligianidis og Nikolantonakis' (2019) kvalitative analyse viste, at eleverne ved at arbejde på denne måde brugte forskellige undersøgelsesmetoder og mangesidige ræsonnementer i forbindelse hermed. Eleverne var også motiverede for at prøve at løse problemer, de ikke kunne kontrollere. Derudover løste eleverne både en pre- og en posttest, som både viste, at eleverne efterfølgende svarede mere rigtigt på de givne spørgsmål og at de i det hele taget svarede på flere spørgsmål.

Radford (2014) påpeger, at det er vigtigt at have en opmærksomhed særligt rettet mod, hvilken type af historiske originalkilder, det er vigtigt at bruge i forhold til det formål, man arbejder med. Smestad (2011a) påpeger, at et af problemerne ved at arbejde med originalkilder er, at der kun er få tilgængelige originalkilder på norsk, hvilket kan bevirke, at det er sværere for undervisere at kaste sig ud i et arbejde hermed. Derudover mangler der i nogle tilfælde også ressourcer, når det kommer til at kvalificere og udbrede arbejdet med originalkilder. Det kan fx være i form af uddannelse, kurser og didaktiske ressourcer (Gulikers & Blom, 2001; Siu 2006; Tzanakis & Arcavi, 2002). Mangel herpå er ærgerlig, eftersom workshops der handler om matematikkens historie, herunder originalkilder bl.a. ifølge Arcavi et al. (1982) kan være givtige for de lærere, der deltager. Sådanne workshops kan understøtte, at lærere får et udvidet indblik i matematikhistorie, men også en udvidet forståelse af selve matematikken, der indgår heri samt, at de får blik for nye didaktiske overvejelser, der kan udspringe af at arbejde hermed (Arcavi et al., 1982).

### 2.3.1. Opmærksomheder omkring brugen af originalkilder

Foranlediget af pointerne fra ovenstående afsnit, er de opmærksomheder og teser, der tages med i det videre arbejde som følger:

- arbejdet med originalkilder kan understøtte elevers matematiske forståelse for og kreative skaben af matematiske ræsonnementer.
- det er væsentligt, at de studerende og eleverne får en forståelse for forskellige typer af beviser, definitioner, notationer, termonologier osv[8].
- det er vigtigt, at eleverne understøttes i deres læsning af teksterne, hvilket bl.a. kan gøres ved tilrettelæggelse af forskellige opgaver eller ved fælles introduktioner og dialoger i klasserne.
- det er vigtigt, at det eksplicíteres over for eleverne, at de skal øve sig i at forstå og selv skabe matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser.
- de redskaber, der ligger til grund for fx konstruktioner i originalkilderne, kan også bringes i spil i forløbene.
- det kan være givtigt at forsøge at skabe nogle før- og efter-situationer, der giver indblik i, om eleverne håndterer efter-situationen anderledes end før-situationen.

[8] Dette læner sig måske snarere op ad tankegangskompetencen, repræsentationskompetencen samt symbol- og formalismekompetencen (Niss & Jensen, 2002). I Fælles Mål er ræsonnement og tankegang slået sammen til én kompetence. Det samme gælder for repræsentations- og symbolkompetencen. Formalismekompetencen er udeladt i Fælles Mål. I ph.d.-projektet fokuseres der særligt på ræsonnementskompetencen, men også på tankegangskompetencen (jf. kapitel 3), hvilket synes at give god mening i lyset af ovenstående tekster.

- den synkrone og diakrone forståelse i forhold til at arbejde med sprogsystemer synes igen at blive fremhævet som en vigtig pointe i forhold til at arbejde med matematikhistorie og originalkilder.

### 2.4. Samspil – matematikkens historie, herunder originalkilder og digitale teknologier

I det her afsnit fremhæves forskellige argumenter i relation til at arbejde med samspillet mellem matematikkens historie, herunder originalkilder og digitale teknologier. Teksterne der refereres til tager afsæt i brugen af forskellige digitale teknologier, fx: GeoGebra, Mathematica and Cabri-Géomètre. Nogle af teksterne fokuserer på CAS og andre tekster fokuserer på dynamisk geometrisoftware. I afsnittet refereres der hovedsageligt til disse under samlebetegnelsen digitale teknologier.

Selvom meget af litteraturen advokerer for at bruge matematikkens historie og originalkilder i matematisk uddannelse, synes det stadig ikke at være særligt udbredt. Van Maanen (2000) fremhæver i Nagaoka et al. (2000), at den mulige grund hertil kan være, at lærere er frygtfulde, fordi arbejdet med historiske kilder tager længere tid:

> This fear may be justifiable in the short run. It is the long-term growth in understanding, however, which is at stake. The advantages argued for history in general, and non-standard media support in particular, are to do with the overall educational experience and the development of the learner over time. (s. 332)

Her er digitale teknologier inkluderet i det, der kaldes “non-standard media support”. Det påpeges, at det kan være svært at se resultatet af at arbejde med både matematikkens historie og brugen af digitale teknologier på kort sigt. I de foregående afsnit, der fokuserede på brugen af matematikkens historie, herunder originalkilder har samme pointe været fremhævet. Derfor er det også en opmærksomhed, der må formodes at gælde arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

Isoda (2004) argumenterer for at arbejde med kombinationen af historiske tekster og redskaber samt digitale teknologier, da det kan understøtte en forståelse af matematiseringsprocesser. Dertil kommer, at studerendes arbejde med historiske tekster og redskaber kombineret med nye redskaber kan synliggøre, at matematisk aktivitet er en menneskelig bestræbelse (Isoda, 2004). Arbejdet med dynamisk geometri kan give studerende muligheder for på nye måder at genopleve og genopdage at bruge klassisk geometrisk intuition (Isoda, 2000a):

> One of the major pedagogical concerns for many years has been that students have lost the opportunity to experience classical geometrical intuitions, which are not

> replaced by a haze of algebraic symbols; DGS begins to offer chance to re-experience some age-old intuitions. (Isoda, 2000a, s. 354)

Matematikkens historie kan i den forbindelse også tjene som et didaktisk redskab i undervisningsøjemed, således at der kan fokuseres på, hvordan man vælger det rigtige digitale værktøj (Isoda, 2000b). Isoda (2004) refererer til Bartolini-Bussi (2000) og fremhæver, at hvis matematik og matematisk aktivitet skal ses ud fra et synspunkt om, at matematiske klasserum skal indeholde varierede typer af læringsaktiviteter, hvor redskaber har en særlig funktion, så er det ikke muligt at "cut the relations between computer software and mathematical ideas. History of mathematics is best resources for tools in mathematics" (Isoda, 2004, s. 229). Det falder i tråd med Isoda (1998), som henviser til Dennis og Confrey (1997) og påpeger, at man ved at sammenholde Descartes' (1637) brug af redskaber med det at bruge dynamiske geometriprogrammer kan arbejde med overgangene mellem euklidisk geometri og analytisk geometri. Isoda (1998) fremhæver, at der ligger matematiske begreber skjult i forskellige matematiske redskaber og måder, man kan arbejde med dem på. Derfor kan studerendes eksperimenterende arbejde med redskaberne medvirke til, at de studerende kan få de skjulte begreber frem i lyset, og det kan understøtte deres matematiske refleksioner (Isoda, 1998).

Furinghetti og Radford (2008) beskriver nogle uddannelsesmæssige muligheder ved at arbejde med kombinationen af brug af matematikkens historie og dynamisk geometrisk software. I forhold til at arbejde med historie fremhæver de:

> (…) students are required to deal with problems that belong to a cultural mathematical tradition. This tradition has its own concepts, methods and ideas (e.g., what is taken to be relevant, what is considered to be an evidence, a proof, etc.). These concepts, methods and ideas have been established and refined over the course of centuries. (s. 644)

Deres argumentation bygger på, at de ser matematiske problemer, som værende bærere af menneskelig intelligens – og det er dynamisk geometrisk software også. Furinghetti og Radford (2008) beskriver også relationen mellem ontogenetisk og fylogenetisk udvikling, altså relationen mellem det enkeltes individs udvikling og slægtens/artens udvikling:

> In getting acquainted with the mathematical tradition, the students then mobilize cultural tools that connect cultural concepts with their ontogenetic understanding in ways that do not really reveal an alleged recapitulation but rather unveil the encounter of the ontogenetic and phylogenetic developments. This encounter is produced by the effects of the school as a sociocultural institution (Bosch & Chevallard, 1999) equipped with a complex system of knowledge acquisition

> (teachers and other adults, a chronologically ordered curriculum, spaces of interaction, routines of socialization, experimentation, feedback and so on.). (s. 644)

Furinghetti og Radford (2008) refererer til Bosch og Chevallard (1999) og pointerer, at det at se skolen, uddannelsessystemet, som en sociokulturel institution med alt, hvad det indebærer, spiller en vigtig rolle, når det kommer til, at elever og studerende bliver bekendt med den matematiske tradition, som også inkluderer de forskellige værktøjer, forskellige traditioner tilbyder og er udviklet af. Furinghetti og Radford (2008) giver også et andet blik på at arbejde med matematikhistorie, herunder originalkilder og digitale teknologier. Her refererer de til Bartolini-Bussi og Mariotti (2008) og skriver:

> (…) human activities are mediated by diverse kinds of tools, artifacts, languages and other systems of signs which, Vygotsky argued, are a constitutive part of our cognitive functions. Most important, these systems of signs, as well as tools and artifacts, are much more than technical aids: They modify our cognitive functioning. (Furinghetti & Radford, 2008, s. 632)

Menneskelig aktivitet ses her som medieret af redskaber, artefakter, sprog og andre tegnsystemer. Derfor har artefakterne m.m. også indflydelse på vores kognitive funktioner. Mariotti (fx 2002; 2012) arbejder med at understøtte elevers ræsonnementer og bevisførelse i det dynamiske geometriprogram Cabri. Mariotti refererer bl.a. til Arzerello et al. (1998), Arzarello et al. (2002), Olivero (2002) samt Baccaglini-Frank og Mariotti (2010) og beskriver, hvordan forskellige typer af dragging kan understøtte elevers arbejde med at se sammenhænge mellem præmisser og konklusioner inden for Euklidisk geometri. Arzarello et al., 2007 fremhæver endvidere, at dragging som feedbackform kan spille en vigtig rolle for studerendes forståelse og læring: "This dragging dialectic makes its accessible a 'jeu de cadre', in the sense of R. Douady between Euclidian geometry and algebraic varieties" (s. 320).

Zengin (2018) udførte et studie med lærerstuderende på et modul om matematikkens historie, hvor det viste sig, at arbejdet med GeoGebra i forbindelse hermed understøttede de studerendes læring i forhold til begreber, teoremer og beviser. Zengin (2018) refererer også til Bartolini-Bussi og Mariotti (1999) og skriver, at dynamisk geometrisk software "also helps to investigate how connections exist within the historical mathematics problems and the harmony between the units forming the mathematical concepts" (Zengin, 2018, s. 2). Aguilar og Zavaleta (2015) foreslår, at digitale teknologier kan opfattes som et instrument, der medierer viden, når man arbejder med uddrag fra originalkilder. Aguilar og Zavaleta (2015) refererer til Gulikers og Blom (2001) og skriver:

> We believe that these types of proposals that combine history and the use of technology should be further developed since, on the one hand, the use of history in the teaching of geometry can have a motivational value to students (Gulikers & Blom, 2001), and, on the other hand, the use of technology can add meaning to the concepts studied in the mathematics classroom by making evident the relationship between the different contexts of representation (such as the numerical, algebraic, and geometric). (s. 398)

Således fremhæver Aguilar og Zavaleta (2015) også, at brugen af teknologi kan give mening til de begreber, der bliver studeret ved at validere sammenhængen mellem forskellige repræsentationer.

I forlængelse heraf kan det også være værd at fremhæve det, Haspekian (2005; 2014) kalder instrumental distance, afstanden mellem de muligheder papir, blyant, lineal og passer giver på den ene side og så de muligheder digitale teknologier, som fx GeoGebra, på den anden side giver. Arbejdet med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier kan understøtte elever, studerende og lærere i at arbejde refleksivt med den instrumentelle afstand (fx Jankvist & Geraniou, 2019; Thomsen & Clark, in review).

Når man arbejder med klassiske matematiske begreber, kan den hurtige feedback, som digitale teknologier giver, kvalificere elevernes begrebsforståelse (fx Caballero-Gonzalez & Bernal-Rodriguez, 2011). Digitale teknologier understøtter elever og studerendes forståelse og giver dem mulighed for at generalisere, når de arbejder med matematiske problemer (Burke & Burroughs, 2009). Kidron og Zehavi (2002) viser dog, at digitale teknologiers visualiseringsmuligheder kan udgøre et problem for nogle studerende i forhold til at udvikle en formel begrebsforståelse. Når de studerende efter at have brugt digitale teknologier arbejder uden, husker de stadig på deres arbejdsproces fra da de arbejdede med digitale teknologier, hvilket kan gøre, at de ikke opnår en mere formel forståelse (Kidron & Zehavi, 2002; Kidron et al., 2001). Kidron (2004) viser, at studerendes evne til at flytte fra visualisering til formelle ræsonnementer kan forbedres ved at arbejde med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier, samt at studerendes arbejde med samspillet kan motivere dem til at lære mere om matematisk teoriopbygning. Kidron og Tall (2015) viser ydermere, at arbejdet med moderne teknologi og historisk udvikling giver eleverne en indsigt i forskellige problemer, der er indlejret i den historiske udvikling, og understøtter deres muligheder for at deltage i refleksive diskussioner heromkring. Hašek og Zahradník (2015) påpeger, at studerendes arbejde med digitale teknologier og historiske matematiske problemer kan understøtte en udvikling af deres matematiske viden, og de kan erhverve sig nødvendige færdigheder til at løse mere komplekse problemer. Baki og Guvens (2009) pointerer, at digitale teknologier medvirker til, at de studerende finder arbejdet med matematikhistoriske problemstillinger interessant og gør det muligt for dem at løse problemer, de ikke kan løse uden disse værktøjer.

Thomsen (2021a) fremhæver nogle potentialer og udfordringer omkring elevernes arbejde med hhv. objekt-level rules og metarules (Sfard, 2008), når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Elevernes arbejde hermed kan understøtte, at de får muligheder for at udvikle både den undersøgende og den produktive side af deres ræsonnements-kompetence[9] (Thomsen, 2021a). I Thomsen (2021b) fremgår det, at der også synes at være et potentiale i at fokusere på at understøtte eleverne muligheder for at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra ud fra det Mellin-Olsen (1984) karakteriserer som dynamisk læsning. Det synes at kunne understøtte, at eleverne får mulighed for at sætte deres egen forståelse af teksten i spil, medvirke positivt til elevernes ejerskab i forhold tekstens indhold samt understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence (Thomsen, 2021b)[10].

### 2.4.1. Opmærksomheder omkring at arbejde med samspillet

Pointerne i dette afsnit knytter sig til samspillet mellem matematikhistorie, herunder originalkilder og digitale teknologier. De opmærksomheder og teser, der tages med i det videre arbejde er:

- at den hurtige visuelle feedback, et dynamisk software kan give anledning til, har betydning for elevernes læringsmuligheder. Det synes særligt vigtigt at være opmærksom på dragging, når der arbejdes med euklidisk geometri. Her kan arbejdet med matematikhistorie, herunder originalkilder, spille en særlig rolle i forhold til elevernes forståelse af den feedback, de modtager fra fx GeoGebra.
- at det er vigtigt at have fokus på redskabernes betydning for måden, der kan arbejdes med matematikken – og for måden der kan arbejdes med ræsonnementer på. Det gælder både i forhold til originalkilden og i forhold til de digitale teknologier.

[9] Betegnelserne “den undersøgende” og “den produktive” side af ræsonnementskompetencen bruges her, som de defineres i KOM-rapporten. Denne definition udfoldes i kapitel 3 ”Teori”.

[10] Referencen Thomsen (2021b) henviser til et abstract, der var udganspunkt for en paperpræsentation på konferencen NOFA8.

- at have blik for at åbne for muligheder for at diskutere matematiske problemstillinger på motiverende, komplekse og refleksive måder på baggrund af elevernes arbejde med originalkilden og arbejde med samme matematiske indhold i GeoGebra.

## 2.5. Opgave- og forløbsdesign

I dette afsnit præsenteres forskellige opgave- og forløbsdesignspointer. Freudenthal (1981) plæderer for brug af matematikhistorie og originalkilder i matematikundervisningen og fremhæver, at man skal fokusere på processerne i stedet for at studere produkterne af matematisk kreativitet, når man arbejder hermed. Bakker og Gravemeijer (2006) refererer til Freudenthals metode "historisk fænomenologi":

> In Freudenthal's (1983a) view, mathematical thought objects (e.g. concepts, structures, ideas, methods) serve to organize phenomena, both from daily life and from mathematics itself. A historical phenomenology is a study of the historical development of a concept in relation to the phenomena that led to the genesis of that concept. The objective of an historical phenomenology is to identify both the problem situations that created a need to organize certain phenomena, and (precursors to) the concepts that have been invented to get a handle on these phenomena. (s. 150)

Bakker og Gravemeijer (2006) bruger metoden til systematisk at arbejde med forskellige historiske eksempler til at opstille forskellige hypoteser, de kan bruge til at understøtte elevers læring omkring at ræsonnere i arbejdet med særligt statistiske begreber og grafer (her bruger de også digitale teknologier). Om hypoteserne skriver de bl.a:

> These hypotheses are part of what Simon (1995) calls hypothetical learning trajectories, which involve expectations of what the mental activities of students will be when they will participate in the envisioned instructional activities. (s. 151)

Denne måde at arbejde med hhv. hypoteser og hypotetiske læringsspor vendes der tilbage til i kapitel 4 "Design Based Research – den metodologiske ramme".

Barnett og Kjeldsen (2016) påpeger, at det er vigtigt også at fokusere på at fremme elever og studerendes refleksioner over deres egne læreprocesser, når man designer aktiviteter, der knytter sig til arbejdet med originalkilder.

Papadopoulos (2014) udførte et studie med elever fra 6. klasse, som viser mulighederne for, at elever under arbejdet med kombinationen af digitale teknologier og matematikhistoriske problemstillinger selv kan validere formler med udgangspunkt i deres egne undersøgelser fremfor bare at læne sig op ad lærerens autoritet. Ifølge Papadopoulos (2014) sker der bl.a. en gradvis udvikling hos eleverne af det, som Sfard (1991) definerer som en strukturelt begrebsforståelse, hvor begrebet understøttes af subjektets visuelle imagination Derudover viste dette studie også, at eleverne ikke kunne generalisere og færdiggøre beviser, men de lærte om beviser, og hvordan bevisprocesser begynder. I forlængelse heraf henviser Papadoupoulos (2014) til Furringhetti (2002) og fremhæver, at elevers arbejde med et matematisk område på et mere uformelt niveau giver mening i forhold til, når de skal arbejde med samme område i en mere formel forstand, når de bliver ældre. I den forbindelse kan det være interessant at fremhæve, at Kidron (2004), som gennemførte studier med ældre studerende, påpeger bl.a. med henvisning til Tall (2000), at det er vigtig, at det visuelle og undersøgende aspekt ledsages af et arbejde med de formelle påstande i forhold til de teorier, der arbejdes med for at sikre en succes i forhold til de studerendes forståelse heraf.

Chorlay (2015) præsenterer tre forskellige undervisningsforløb, der fokuserer på at støtte studerendes ræsonnementer og beviser, når man arbejder med originalkilder og digitale teknologier. Fælles for de forløb er, at originalkilderne er valgt med udgangspunkt i de mål, der er sat for undervisningen. I et af forløbene tages der udgangspunkt i Euklids sætning 16, bog III, der handler om cirkler og tilhørende linjer. Før de studerende præsenteres for selve sætningen, præsenteres de bl.a. for en af Euklids definitioner i indledningen til bog III, der netop handler om cirkler og linjer. Her bliver de studerende bedt om at omformulere Euklids definition med deres egne ord eller tegninger/konstruktioner og særligt at forklare forskellen mellem to udvalgte ord. Derefter skal de studerende arbejde med sætning 16, bog III, som i undervisningsforløbet bliver opdelt i 2 dele, og til hver del er der forskellige spørgsmål. Disse spørgsmål lægger bl.a. op til, at de studerende skal tegne de elementer, der er relevante for netop den del af beviset, de arbejder med. Derudover får de studerende informationer om, at Euklid i beviset bygger på andre sætninger fra *Euklids Elementer*, som de skal prøve at forklare, hvad, de tror, går ud på. De studerende bliver også gjort opmærksomme på, at der er en fejl i en af delene i beviset, og her skal de forholde sig til, hvem der mon har forårsaget denne. Undervejs bliver de studerende bedt om at argumentere for hvilke typer af teoremer, der indgår i beviset samt selve bevistypen.

I Chorlay (2016) præsenteres ligeledes forskellige undervisningsforløb relateret til brug af originalkilder. I et af forløbene gøres også brug af digitale teknologier. I denne tekst introduceres og diskuteres mulighederne for at arbejde med Meta-opgaver (M-opgaver), når man arbejder med originalkilder. Ifølge Chorlay (2016) er det bl.a. vigtigt, at M-opgaver lægger op til, at de studerende skal identificere den matematiske baggrundsviden i originalkilden og at de skal arbejde med denne på forskellig vis. Det kan fx være ved at inddrage digitale teknologier. Disse opgavetyper inkluderer bl.a: "(…) justifying, comparing, assessing, criticizing, summarizing; proving and reformulating/translating/rewriting" (Chorlay, 2016, s. 21). Chorlay refererer ydermere til Kjeldsens (2012) brug af Sfards (2008) begreb om commognitive konflikter og pointerer, at det kan være en måde at arbejde med begrebet M-opgaver.

Jankvist og Geraniou (2019) refererer til Drijvers et al. (2010) samt Drijvers og Gravemeijer (2005) og skriver, at de studerendes tekniske problemer, når de arbejder med digitale teknologier, kan hænge sammen med deres kognitive problemer med at forstå de matematiske begreber, der indgår i det arbejde, de er i færd med. Her kan arbejdet med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier være med til at understøtte en stærkere kognitiv forståelse hos eleverne. Jankvist og Geraniou (2019) refererer også til Duval (2006) og fremhæver bl.a. vigtigheden af brug af sproget og forskellige notationsformer, når man arbejder med geometrien. De bruger bl.a. en illustrativ case, en beskrivelse af en række opgaver, der tager udgangspunkt i Euklids sætning 22, bog I. Den omhandler konstruktion af trekanter med tre linjer, hvor summen af de to af linjernes længde skal være større end den tredje linjes længde. De bruger bl.a. casen til at vise potentielle fordele ved registerskift, når det gælder om at understøtte studerendes ræsonnement og bevis, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier. Jankvist og Geraniou (2019) er inspireret af Barnett et al. (2014) definition af guided reading og den type opgaver, der er designet som "læs, reflekter og respons"-opgaver. Jankvist og Geraniou (2019) indleder med at beskrive målene for opgaverne og deler derefter Euklids sætning 22 op i små bidder, hvortil de knytter forskellige opgaver. Det kan fx være, at eleverne præsenteres for titlen på sætningen og skal forholde sig til, hvad sætningen handler om, eller at eleverne skal konstruere forskellige trekanter med forskellige sidelængder i GeoGebra og derefter sammenholde dem med og bruge dem til at argumentere for de dele af sætningen, de har arbejdet med. Eleverne bliver også bedt om at skrive deres argumenter ned, så de kan bruge dem i klassediskussionen efterfølgende. I en af opgaverne bliver eleverne fx bedt om at trække i et af hjørnerne af trekanterne – dragging er altså også en ekspliciteret del af opgaverne. Der er også fokus på at arbejde med forskellige typer af notationer i forløbet.

Jankvist et al. (2019b) refererer til Dreyfus (1999) og skriver, at studerende har svært ved at arbejde med matematiske beviser, hvilket kan skyldes, at de aldrig har lært, hvad der gælder som et matematisk argument. Endvidere refererer de til Duvals (2007) begreb "status confusion", som omhandler studerendes forvirring i forhold til at forstå forskellige former for matematiske ræsonnementer samt at forstå forskellige udsagns status inden for et bevis, fx hypoteser, egenskaber og konklusioner. Jankvist et al. (2019) pointerer, at det ofte er sådan, at eksempler spiller en underspillet rolle, når man ser på abstrakt versus konkret matematik. Derfor foreslår de, at man kan udvikle diskussioner heromkring ved at arbejde med kombinationen mellem historiske kilder og CAS. Jankvist et al. (2019) plæderer bl.a. for, at man kan fokusere på at opbygge sociomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996), hvor man diskuterer og validerer hinandens matematiske udsagn, når man arbejder med induktive ræsonnementer i relation til beviser og modeksempler. Dette kan gøres med udgangspunkt i arbejdet med originalkilder og digitale teknologier, fordi det "allowing students and teachers to discuss the epistemological status of various pieces of knowledge and intuitions about mathematics" (Jankvist et al., s. 327). Endvidere påpeger de, at disse sociomatematiske normer kan forankres i det, Alibert (1988) kalder en "scientific debate", som består i, at læreren initierer og organiserer de studerendes produktion af videnskabelige udsagn. Validiteten af disse diskuteres blandt de studerende. De påstande, der til fulde valideres, bliver til teoremer, og dem som vurderes at være ukorrekte gemmes som "falske udsagn" og forbindes med passende modeksempler. Omdrejningspunktet for dette er at kvalificere det, som Misfeldt og Jankvist (2018) kalder "justificational mediation", retfærdiggørende mediering, hvor CAS udgør den retfærdiggørende proces. Arbejdet med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier kan medvirke til at gøre de studerende opmærksomme på, at det måske ikke er tilstrækkeligt kun at læne sig op ad de digitale teknologier, når det kommer til at arbejde med beviser (Jankvist et al., 2019). Retfærdiggørende mediering er en del af en tredelt distinktion: epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018). I følge Jankvist et al. (2019) synes Misfeldt og Jankvist (2018) definitioner af de tre medieringsformer bl.a. at være er inspireret af Trouche (2005) i forhold til den instrumentelle tilgang, Artigues distinktion mellem epistemisk og pragmatisk (2002) samt Harel og Sowder (2007) beskrivelse af overbevisningsskemaer (det udfoldes yderligere i kapitel 3 "Teorier"). De tre distinktioner mellem de forskellige medieringer synes også at kunne være hensigtsmæssige at benytte i planlægning og analyse af undervisningsforløb, hvor samspillet mellem originalkilder og dynamiske geometriprogrammer er omdrejningspunktet (Thomsen & Jankvist, 2020). Da de tre medieringsformer bygger på Harel og Sowders (2007) overbevisningsskemaer ligger der også implicit heri, at det at bevise og ræsonnere bl.a. indebærer at kunne overbevise sig selv og andre.

Jankvist og Geraniou (2021) viser, at arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra bl.a. kan understøtte, at GeoGebra fungerer som epistemisk mediator. De skriver med reference til Balsløv (2018), Jankvist og Geraniou (2019), Olsen og Thomsen (2017), at GeoGebra kan bruges som en dåseåbner for eleverne i forhold til at kunne læse originalkilden. Jankvist og Geraniou (2021) tilføjer derefter med udgangspunkt i deres case med to elever, at det også giver anledning til, at eleverne har arbejdet med GeoGebra på en "whiteboxing" måde, hvor det matematiske indhold bliver tydeligt for eleverne.

Flere af studierne understreger at brug af digitale teknologier understøtter elever og studerendes muligheder for at undersøge på egen hånd, fx refererer Caglayan (2016) til Borwein (2005) og fremhæver, at studerende kan bruge softwaret til "testing and especially falsifying conjectures, and suggesting approaches for formal proof' (2005, 76)" (Caglayan, s. 145).

Mellin-Olsens (1984) sondring mellem at forstå, hvordan man bruger regler og at forstå strukturen bag reglerne, kan yderligere nuancere og kvalificere brugen af de tre forskellige typer medieringer i planlægning af forløb (Thomsen & Jankvist i paper præsenteret på ICME14, 2021). Thomsen og Jankvist (in press) giver eksempler på, at tankegangskompetencen og ræsonnementskompetencen kan spille godt sammen, når det handler om at skabe grobund for, at eleverne kan få en forståelse for forskellige typer af beviser og de forskellige matematiske definitioner og deres betydning i beviser. Dette kan ligeledes med fordel ses i lyset af både den undersøgende side og produktive side af de to matematiske kompetencer.

Ingen af de studier, der er inkluderet i dette review, lader bare de studerende gå på opdagelse helt og aldeles på egen hånd. De studerendes eksperimenterende tilgang er orkestreret af forskere eller/og af undervisere og lærere.

### 2.5.1. Opmærksomheder omkring at arbejde med opgave-og forløbsdesign

De opmærksomheder og teser, der tages med videre omkring opgave- og forløbsdesign er:

- at det kan være en god ide at tage udgangspunkt i de historiske tekster og derudfra opstille hypoteser og hypotetiske læringsspor.
- at det er muligt at kreere situationer, hvor eleverne udfolder sig kreativt og selvstændigt i forhold til det matematiske indhold.
- at det kan være svært for elever på mellemtrinnet at generalisere og udføre egentlige beviser.
- at det er vigtigt at have en opmærksomhed rettet mod det matematiske indhold og de argumenter, der kan gøre sig gældende i forhold hertil, når der arbejdes med samspillet. Her kan en guidning i forhold til opgaveformuleringer være hensigtsmæssig.

- at der skal være fokus på at opbygge nogle normer i det matematiske klasserum, der underbygger arbejdet med ræsonnementer og bevisførelse. Det skal fx være tydeligt for eleverne, de studerende, når der arbejdes med matematisk argumentation, ræsonnementer og bevisførelse.
- at distinktionerne mellem epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018) synes at være hensigtsmæssige, når man arbejder med at planlægge og analysere undervisningsforløb, der handler om samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Her bliver det også vigtigt at arbejde med at overbevise sig selv og andre. I den forbindelse kan Mellin-Olsens (1984) sondring mellem at bruge og forstå regler bidrage til en yderligere nuancering.

## 2.6. Lærerens særlige rolle

Læreren spiller en meget vigtig rolle, både når man arbejder med digitale teknologier, matematikhistorie og originalkilder (se fx Arzarello et al., 2007; Kántor & Tóth, 2016). Capone et al. (2019) pointerer fx, at det kan være frugtbart at arbejde med uddannelsesmæssige principper inspireret af Montessori-metoden, når man arbejder med digitale teknologier. Her er lærerens rolle at være guidende i forhold til at understøtte det børnecentrerede, elevernes frihed og deres direkte oplevelser med materialer, som understøtter elevernes sanselige oplevelse og erfaring. Dette afsnit omhandler lærerens særlige rolle. Pointerne, der præsenteres i resten af dette afsnit, er fra tekster, hvor omdrejningspunkt ikke nødvendigvis er lærerens særlige rolle, men denne uddrages heraf.

Jankvist et al. (2019a) viser ud fra to cases, hvordan udvidelsen af den didaktiske model "Mathematical knowledge for teaching"[11] (MKT) til "Mathematical knowledge for teaching teachers"[12] (MKTT) både kan bruges i en didaktisk planlægning og analyse af arbejdet med matematikkens historie, herunder originalkilder. Det kan være hensigtsmæssigt at arbejde med både MKT og MKTT i forhold til at understøtte og fokusere på både lærerens matematiske viden, pædagogiske viden og samspillet mellem disse to vidensformer omkring undervisning af forskellige matematiske områder. MKTT indeholder en særlig kompleksitet, fordi der også

[11] Jankvist et al. (2019a) refererer til Ball og hendes kollegers arbejde med praksisbaseret teori omkring hvilken matematisk viden, det kræver for at undervise i et udvalgt område.

[12] Jankvist et al. (2019a) refererer til Zopfs (Zorpf, 2010, Ball et al. 2008, Schulman 1986) tilføjelse til ovenstående teoretiske ramme. Således at den også omhandler hvilken matematisk viden, det kræver for at undervise lærere i et udvalgt område.

her fokuseres på, hvilke matematiske og pædagogiske vidensområder, det så yderligere kræver af den underviser, som underviser lærere. På baggrund af de to cases konkluderer de bl.a.:

> Hence, the use of history of mathematics, and in particular that of historical primary source material, seems to offer unique opportunities for developing not only MKT but certainly also the disciplinary knowledge needed for MKTT. (Jankvist et al., 2019a, s. 329)

Deres præsentation af de to cases viser bl.a., hvordan arbejdet med matematikkens historie, herunder originalkilder, kan understøtte fagfaglige, didaktiske og fagdidaktiske overvejelser. I den ene case omhandlede disse også, hvordan digitale teknologier kan bruges i den sammenhæng. Disse overvejelser får også betydning for den rolle underviseren, læreren, kan indtage i et klasserum, i et undervisningsrum.

Olsen og Thomsen (2018) refererer til Jankvist og Tolbod (2007), som bl.a. refererer til Davis (2004) og påpeger, at der fx er demokratiske og videnskabelige problemer ved, at meget matematik er skjult i it-software. Elevernes arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra kan give elever indblik i, at meget matematik er skjult i computerresultater. Det kan medvirke til at skærpe elevernes opmærksomhed på det Buchberger (2002) og Nabb (2010) kalder Black Box situationer (Olsen & Thomsen, 2018; Thomsen & Olsen, 2019). Olsen og Thomsen (2018) samt Thomsen og Olsen (2019) tager udgangspunkt i samme undervisningsforløb, hvis afsæt bl.a. var at se originalkilder og GeoGebra som to forskellige diskurser med udgangspunkt i Sfards (2008) definitioner heraf. Endvidere udvidede de Jankvists (2009) distinktion mellem in-issues og meta-issues i forhold til brug af matematikkens historie til også at gælde it. Disse distinktioner brugtes aktivt af læreren til eksplicit at understøtte fælles dialoger i klassen, hvor eleverne bl.a. kunne tage stilling til forskellige spørgsmål og medvirke til at placere i- og om-matematiske spørgsmål og svar på en fælles diskursplanche i klassen. Denne diskursplanche var netop inddelt i originalkilder (i det konkrete tilfælde Euklids sætning 1, bog I) og GeoGebra, som to diskurser og hver af disse diskurser var yderligere opdelt i in- og meta-issues. I Thomsen og Olsen (2019) lægges vægten på, at ovenstående kan medvirke til at understøtte elevernes udvikling af mathemacy, "which may help students to reinterpret their reality and to pursue a different reality" (Skovsmose & Nielsen, 1996, s. 1263). Mens der i Olsen og Thomsen (2018) lægges vægt på, at distinktionerne i- om- og med- matematik[13] bl.a.

[13] Med inspiration fra Jankvists (2007) brug af begreberne om-, i- og med-matematik, som refererer til kategoriseringen fra IMFUFA fra RUC.

kan bruges som afsæt til at formulere forskellige læringsmål, der læner sig op ad disse distinktioner. Denne kobling af i- og om-matematiske mål, som forankres i selve undervisningen, anses som værende et vigtigt grundlag for lærerens arbejde med at understøtte elevernes mulighed for udvikling af en matematisk literacy i arbejdet med digitale teknologier. Et sådant afsæt formodes yderligere at medvirke til også at styrke elevernes med-matematiske aktiviteter – aktiviteter, der knytter sig til matematik i anvendelse (Olsen & Thomsen, 2018).

Med udgangspunkt i et casestudie rettet mod 5. klasse beskriver Maffia (2018) lærerens rolle, når der arbejdes med originalkilder ud fra et semiotisk perspektiv (inspireret af bl.a. Mariotti & Maracci, 2012). Maffia er i sit studie optaget af, hvordan læreren kan understøtte elevernes dialog med originalkilden i en fælles dialog i klassen. Maffia (2018) fremhæver, at læreren spiller en afgørende rolle i forhold til hele tiden at veksle mellem på den ene side at give eleverne muligheder for at svare og på den anden side understøtte, at deres svar kvalificeres og sammenholdes med opgaven.

Jankvist et al. (2019b) beskriver med reference til Aliberts (1988, s. 32) definition af “scientific debate” tre forskellige trin i en sådan debat, som initieres af læreren. I deres gengivelse af Aliberts (1988) trin i en “scientific debate” synes det vigtigt, at læreren søger for at sikre, at de studerende får muligheder for at producere og arbejde med matematiske udsagn. I første omgang uden at disse umiddelbart evalueres, netop for at skabe grundlag for, at de studerende kan være aktive i at diskutere, verificere og evt. forkaste udsagnene. Dette gøres ved hjælp af matematisk argumentationer og beviser.

Thomsen og Jankvist (2020) giver et eksempel på, hvordan læreren kan organisere, at eleverne i grupper præsenterer forskellige udkast til beviser og derefter diskuterer disse med deres klassekammerater. Her synes lærerens rolle at være helt afgørende, når det handler om mellemtrinselever. Det er bl.a. vigtigt, at læreren er opmærksom på ikke at tage motivationen fra eleverne, sikre at deres udkast tages alvorligt samtidig med at sikre, at væsentlige forhold omkring beviset bliver bragt frem i lyset. Dertil kommer, at læreren også kan sikre samtaler omkring, hvordan brugen af GeoGebra kan spille ind, når det handler om at argumentere eller bevise. Er det fx okay, at eleverne tager udgangspunkt i GeoGebras “knapper” så som “regulær polygon”, “parallelle linjer”, “vinkelrette linjer” osv. og bruger disse som en argumentation i sig selv? Her spiller læreren ydermere en vigtig rolle i forhold til, at brugen af GeoGebra ikke understøtter udvikling af det, Misfeldt og Jankvist (2018) kalder teknoautoritære bevisskemaer – at eleverne i sig selv bliver overbevist, blot fordi de digitale teknologier viser det. Misfeldt og Jankvist (2018) er i forbindelse med deres definition af teknoautoritære bevisskemaer inspireret af Harel og Sowders (2007) definition af eksterne overbevisningsskemaer.

Jankvist og Geraniou (2021) tager bl.a. afsæt i Vygotskys (1978) zone for nærmeste udvikling i deres sammensætning af det elevpar, der udgør deres case. Her er tanken, at eleverne kan nå længere i samspillet med hinanden, fordi den ene af dem er en “mere vidende anden”. De påpeger dog også, at eleverne kan være en “mere vidende anden” for hinanden på forskellige punkter. Dertil kommer, at forskeren spørger indtil elevernes forskellige forståelser og forsøger at guide dem videre med spørgsmål, der relaterer sig hertil. Her tager de udgangspunkt i forskeren, men det er også oplagt at være opmærksom på, at lærerens særlige rolle i arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra i høj grad kan bestå i at være nysgerrig på elevernes zone for nærmeste udvikling i forhold til de matematiske argumentationer og ræsonnementer, der er i spil, og forsøge at spørge videre ind til disse. Således at elevernes zone for nærmeste udvikling udvider sig herved.

### 2.6.1. Opmærksomheder omkring lærerens særlige rolle

De opmærksomheder og teser, der tages med videre i afhandlingen i forhold til lærerens særlige rolle er:

- at læreren er en vigtig nøgle, hvis det skal lykkes at arbejde med originalkilder på mellemtrinnet. Det gælder også i forhold til at arbejde med samspillet mellem originalkilder og fx GeoGebra.
- at det kan være frugtbart, at læreren har blik for kompleksiteten i at se på både matematikken, didaktikken og fagdidaktikken i forhold til de vidensområder, læreren må fokusere på at sætte sig ind i omkring klassens og de enkelte elevers arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Kompleksiteten omkring de vidensområder, undervisere af lærere må sætte sig ind i, kan måske også overføres til samarbejdet mellem forskere og lærere. Således at forskeren er særligt opmærksom på egen rolle i samarbejdet med lærere omkring planlægning af afprøvninger.
- at læreren orkestrerer diskussioner i klassen omkring ligheder og forskelle mellem brug af hhv. originalkilder og digitale teknologier samt diskussioner af elevernes egne producerede matematiske udsagn. Her synes det værdifuldt, at læreren spiller en aktiv rolle i forhold til at sikre, hvordan ting bliver diskuteret i den forbindelse. Således at der også er fokus på elevernes motivation i den sammenhæng.

- at læreren er nysgerrig på elevernes zone for nærmeste udvikling. Det gælder både i forhold til elevsammensætning i aktiviteter, hvor der skal samarbejdes. Ligesom det også gælder, når læreren går i dialog med eleverne. Her må læreren tage udgangspunkt i elevernes udsagn og stille spørgsmål, der gør det muligt for dem at reflektere videre derfra.

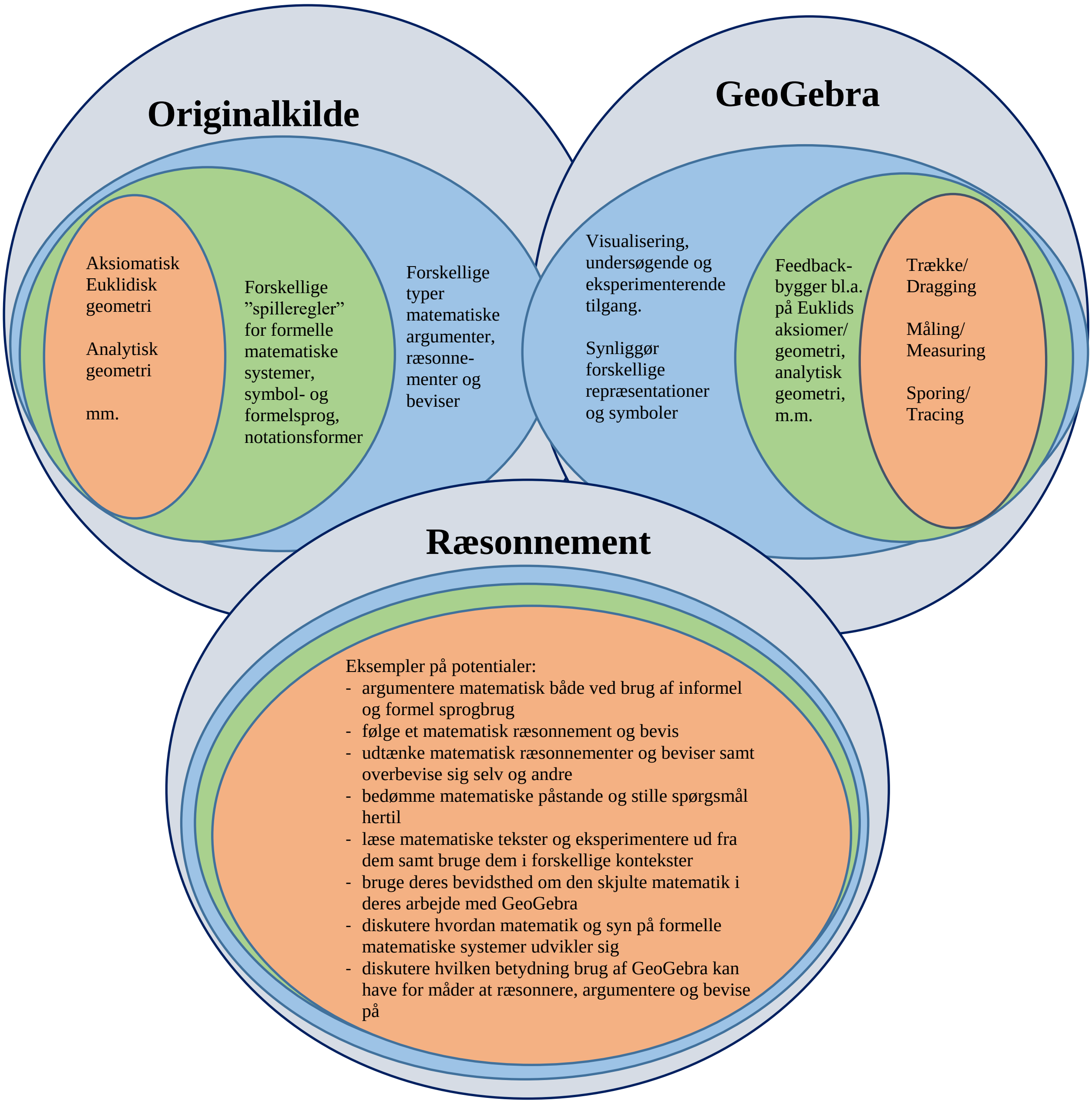
## 2.7. Overordnede potentialer og valg af teoretiske distinktioner

I dette afsnit præsenteres en model, der kan ses som en illustration af de væsentligste potentialer, som kan medvirke til at understøtte eleverne i at ræsonnere matematisk, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Afsnittet afsluttes med en kort præsentation og begrundelse for valg af teoretiske distinktioner, der bruges i det metodiske kapitel (kapitel 4), lærebogsanalysen (kapitel 5), retrospektive analyser af afprøvninger (kapitel 6) samt danner grundlag for denne afhandlings teoretiske bidrag (afsnit 7.4.1.). De udvalgte teoretiske distinktioner beskrives yderligere i kapitel 3 "Teori".

Med udgangspunkt i FS1 er der i de foregående afsnit på den ene side beskrevet brug af forskellige teorier, når der arbejdes med matematikkens historie, herunder originalkilder og samspillet med digitale teknologier. På den anden side er der beskrevet forskellige opmærksomheder og teser, der kan tages afsæt i, når der skal designes opgaver og forløb til afprøvningerne. Det er vigtigt at slå fast, at dette review hovedsageligt omhandler potentialerne ved at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Umiddelbart vurderes det ikke, at det skyldes en selektiv læsning, snarere at de forskellige tekster i højere grad har vægtet potentialerne end udfordringerne.

Nedenstående model i figur 3 præsenterer helt overordnet nogle af de fremtrædende potentialer omkring at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres matematiske ræsonneren, når der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Modellen er yderligere inspireret af Højsteds (2020) påpegning af feedback, dragging, måling og sporing som fire forskellige særlige potentialer, når der er fokus på ræsonnementskompetencen i arbejdet med dynamiske geometriprogrammer. I nedenstående model har feedback en særlig rolle. Her ses feedback som mere overordnet end de øvrige potentialer, Højsted (2020) fremhæver. Dragging, måling og sporring ses altså i den nedenstående model som delelementer af feedbacken. Derfor er den røde cirkel en del af den grønne cirkel i den overordnede "GeoGebra"-cirkel. Formålet med modellen er at illustrere nogle af de overordnede potentialer ved arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Det er illustreret ved, at de to cirkler "originalkilder" og

“GeoGebra” overlapper hinanden. Et af de overordnede potentialer i samspillet er, at originalkilder kan medvirke til at understøtte elevernes muligheder for at få blik for og forståelse for matematikken bag feedbacken, GeoGebra giver – selvfølgelig afhængigt af, hvilken originalkilde der arbejdes med. Samtidig kan originalkilden medvirke til, at eleverne får indblik i hvilke typer argumenter, der er på spil, og hvordan argumentationsrækker kan opbygges, således at eleverne bliver i stand til at arbejde hermed, når de arbejder mere eksperimentere med de visualiseringsmuligheder, GeoGebra tilbyder. I modellen er der også fremhævet nogle af de potentialer, der er gengivet i reviewet med henblik på at understøtte elevernes muligheder for at ræsonnere. Den historiske bevidsthed ligger implicit i de forskellige dele af modellen. Det skyldes, at der i ph.d.-projektet ikke, som et mål i sig selv, er fokus på at arbejde med at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres historiske bevidsthed. I dette ph.d.-projekt ses elevernes mulighed for at udvikle en historisk bevidsthed som et middel til at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.




*Figur 3:Model – Samspillet mellem originalkilder og GeoGebra – Eksempler på overordnede potentialer.*

Jeg har jævnligt ladet mig inspirere af og måttet vende tilbage til udvalgte tekster og teorier, teoretiske rammer, distinktioner og begreber for at genlæse dem ud fra det givne tidspunkt i processen. På den måde har jeg løbende undervejs i ph.d.-projektet tilføjet nye lag til mine egne forståelser af teksterne og de er også løbende blevet afprøvet og knyttet til forskellige dele af ph.d.-projektet. Det er baggrunden for mit valgt af de fire teoretiske distinktioner samt begrebet historisk bevidsthed, der hovedsageligt arbejdes videre med i denne afhandling.

Distinktionen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002) er valgt, fordi den synes meget velegnet både til at planlægge og analysere undervisningsforløb, opgaver og delelementer af dialoger i forbindelse med arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

I forbindelse med digitale teknologier og ræsonnementer arbejdes videre med Misfelt og Jankvists (2018) distinktion med reference bl.a. til Rabardel og Bourmaud (2003), Artigue (2002) og Trouche (2005) i forhold til distinktionen mellem pragmatisk og epistemisk mediering samt Misfeldt og Jankvists (2018) tilføjelse af retfærdiggørende mediering. Disse 3 typer medieringer ser Misfeldt og Jankvist i relation til Hannas (1989) distinktion mellem beviser, der forklarer og beviser der beviser samt Harel og Sowders (2007) overbevisningsskemaer. Distinktionen mellem de tre typer af medieringer er valgt, fordi de synes at sætte særligt fokus på at arbejde med kombinationen af digitale teknologier og matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser.

Dertil har jeg valgt Mellin-Olsens (1984) skelnen mellem forståelse af at forstå strukturen bag ved regler eller at forstå, hvordan man bruger regler i matematikholdige situationer, som en distinktion. Den distinktion giver mulighed for at nuancere og præcisere delelementer af arbejdet med originalkilderne i samspillet med GeoGebra. Denne distinktion kalder Mellin-Olsen (1984) mere overordnet for regelopfattelse og strukturopfattelse. Heri ligger også yderligere en mulighed for at arbejde med at udvide eller indsnævre sammenhængene mellem de forskellige matematiske definitioner, når der arbejdes med geometriske ræsonnementer.

I forlængelse af Frieds (2007) brug af Saussure i forbindelse med at arbejde med tegnsystem og skelnen mellem en synkron beskrivelse (fungerende sprogsystemer) og en diakron beskrivelse (beskrivelse af sprogets historiske udvikling), når elever og studerende arbejder med matematikkens historie, har jeg valgt at arbejde videre med Mellin-Olsens (1984) distinktion mellem dynamisk og statisk læsning. Denne distinktion knytter sig ikke som sådan direkte til distinktionen mellem en synkron og diakron beskrivelse og brug af sprogsystemer, men den dynamiske læsning kan snarere tolkes som at være en brobygger herimellem. Derudover synes Mellin-Olsens (1984) begreb dynamisk læsning i høj grad at vægte elevernes aktive deltagelse. Det gælder i forhold til at gå i dialog med teksten, sådan som det også lægges op til i de tidligere præsenterede læsestrategier (Barnett et al., 2014; Chorlay, 2019; Fried et al., 2016), men Mellin-Olsens (1984) begreb dynamisk læsning går videre end det, eleverne synes også at blive medskabere af teksten. Det synes at være en vigtig pointe, når der arbejdes med samspillet mellem originalkilde og GeoGebra, fordi GeoGebra giver eleverne selvstændigt og i samarbejde med læreren nogle andre muligheder for at arbejde med de matematiske problemstillinger og beviser, der præsenteres i originalkilden (Thomsen, 2021b). Dertil kommer, at elevernes arbejde med GeoGebra også kan ses som en dynamisk eller statisk læsning. Det er også en begrundelse for, at disse begreber er medtaget som en af de fire teoretiske analytiske distinktioner. Det vil yderligere blive udfoldet i de næste kapitler.

Valget af at arbejde videre med Jensens (2011) historiesyn synes at falde godt i tråd hermed, da det bygger på et socialkonstruktivistisk videnskabssyn. Dette udfoldes ligeledes yderligere i næste kapitel.

I reveiwet indgår der ikke tekster, der arbejder med alle disse 4 teoretiske distinktioner samt historisk bevidsthed i forhold til at undersøge, hvordan man kan understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. På den baggrund kan selve undersøgelen også ses som en ny vinkel ind i spændingsfeltet mellem de tre forskningsfelter: 1) Matematikkens historie, herunder originalkilder, 2) digitale teknologier i matematikundervisningen og 3) matematiske ræsonnementer og beviser.

# 3. Teori

I kapitlet udfoldes de fire teoretiske distinktioner (jf. afslutningen på kapitel 2), som danner teorigrundlaget for analyserne i henholdsvis kapitel 5 "Analyse af lærebogssystem" og kapitel 6 "Retrospektiv analyse af afprøvningerne". Ligesom de indgår i kapitel 4 "DBR – Den metodologiske ramme i projektet", hvor refleksionerne og teorierne bliver omsat til planlægningsideer i forbindelse med de tre afprøvninger.

Kapitlet indledes med en beskrivelse af kompetencetænkningen i KOM-projektet (Niss & Jensen, 2002). Den knyttes til Fælles Mål, som er inspireret af KOM-projektet og er et af styredokumenterne for grundskolen anno 2019-2021 – perioden nærværende ph.d.-projekt strækker sig over. I forlængelse heraf præsenteres nogle overvejelser omkring at sigte mod, at eleverne udvikler en historisk bevidsthed (Jensen, 2011), som et middel til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

Derefter præsenteres de fire teoretiske distinktioner: 1) Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002), 2) Pragmatisk, retfærdiggørende og epistemisk mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018 med inspiration fra bl.a. Artigue, 2002; Trouche; 2005 samt Harel & Sowder, 2007), 3) Statisk og dynamisk læsning (Mellin-Olsen, 1984) samt 4) Regel- eller strukturopfattelsen (Mellin-Olsen, 1984). Afslutningsvist gives en kort beskrivelse af, hvordan de overordnet som teoretisk grundlag bringes i spil i analyserne i de to følgende kapitler.

## 3.1. KOM-projektet

KOM-projektet (Niss & Jensen, 2002) har og har haft stor indflydelse på styredokumenterne for matematikfaget knyttet til forskellige uddannelsesinstitutioner i Danmark. Derudover synes KOM-projektet og synet på matematiske kompetencer også at have stor betydning i et internationalt perspektiv, når man taler om matematikundervisning og uddannelse, fx er væsentlige dele af kompetencebeskrivelserne at spore i PISAs beskrivelse af matematisk literacy (Niss et al., 2016). De matematiske kompetencebeskrivelser, som er en af byggestenene i KOM-projektet, blev fx udviklet parallelt med de til en vis grad beslægtede kompetencetilgange i fx Australien og USA (National Council of Teachers of Mathematics), og Tysklands curriculum består af 6 matematiske kompetencer (Niss et al., 2016). På den baggrund giver det god mening, både i et nationalt og internationalt matematikuddannelsesmæssigt forskningsperspektiv, at tage sit afsæt i KOM-projektet, når hoved-omdrejningspunktet i nærværende ph.d.-projekt netop er et ønske om via brug af originalkilder at bidrage til en udvidelse af muligheder for, at elever kan udvikle deres ræsonnements-kompetence, når de arbejder med digitale teknologier.

### 3.1.1. Matematiske kompetencer

I KOM-rapporten fremhæver Niss og Jensen (2002), at det at besidde en matematisk kompetence er mere end at besidde færdigheder i forhold til at udøve matematisk virksomhed. De definerer bl.a. en matematisk kompetence ved, "at *en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer*" (Niss & Jensen, 2002, s. 43). En matematisk kompetence står altså ikke alene, men er rettet mod en situationel bestemt matematisk udfordring. KOM-projektet består af 8 matematiske kompetencer: Tankegangskompetence, problembehandlingskompetence, modelleringskompetence, ræsonnementskompetence, repræsentationskompetence, symbol- og formalismekompetence, kommunikationskompetence og hjælpemiddelkompetence. Hver af kompetencerne har en selvstændig betydning samtidig med, de ses som sammenhængende med de andre kompetencer, som en del af et hele.

### 3.1.2. Kompetencernes duale karakter

De matematiske kompetencer er yderligere karakteriseret ved, at de har en dual karakter. Forstået på den måde, at hver kompetence både har en *undersøgende* og en *produktiv* side:

> Den "produktive" side af en kompetence består i, at man selv kan gennemføre de processer, kompetencen omfatter. Den "undersøgende" side angår forståelse, analyse og kritisk bedømmelse af allerede udførte processer og deres produkter. (Niss & Jensen, 2002, s. 63-64)

I KOM-rapporten understreges det altså, at begge sider af kompetencerne har en handlingskarakter, en adfærdskarakter. Den undersøgende virksomhed foregår på det mentale plan, men har en handlingskarakter i form af refleksion, analyse og bedømmelse. Niss og Jensen (2002) skriver bl.a. om denne handlingskarakter i forbindelse med den undersøgende side af de matematiske kompetencer: "Der er blot tale om en anden slags aktivitet end selve den gennemførelse af de omhandlede processer, som leder frem til produkter, der i en eller anden forstand er "synlige"" (s. 64). Yderligere pointeres det i den forbindelse, at den handlingsmæssige duale karakter af kompetencerne ikke skal forstås ud fra et behavioristisk syn:

> At kompetencerne har adfærdskarakter, betyder bestemt ikke, at de skal forstås behavioristisk, dvs. at de nødvendigvis lader sig aflæse udefra som klart afgrænsede og veldefinerede handlinger, der skal forstås som et individs respons på givne stimuli. (Niss & Jensen, 2002, s. 64)

Der vendes tilbage til denne kompetenceforståelse i afsnit 3.1.5., hvor fokus er på ræsonnementskompetencen. I resten af afhandlingen bruges betegnelserne ”den undersøgende” og “den produktive side” af ræsonnementskompetencen. De ligger sig netop op ad sprogbrugen og dermed karakteristikken af kompetencernes duale karakter i KOM-rapporten. Der kan være nogle sammenfald mellem KOM-rapportens beskrivelse af den undersøgende side af kompetencerne, og når eleverne i fx lærebogssystemet Kontext+ bliver bedt om at undersøge dette eller hint. Det vendes der tilbage til i kapitel 5 ”Analyse af lærebogssystem”. For nuværende er det blot vigtigt at slå fast, at disse betegnelser ikke skal forveksles med betegnelsen “undersøgende matematik”, som er meget brugt i det danske matematikuddannelsesfelt anno 2021.

### 3.1.3. To grupper – To overkompetencer

Ydermere er kompetencerne delt op i to grupper, “at kunne spørge og svare i og med matematik” samt “at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber” (Niss & Jensen, 2002, s. 44). I gruppen “at kunne spørge og svare i og med matematik” indgår: Tankegangskompetence, problembehandlingskompetence, modelleringskompetence og ræsonnementskompetence. Gruppen “at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber” er knyttet til kompetencerne: Repræsentationskompetence, symbol- og formalismekompetence, kommunikationskompetence og hjælpemiddelkompetence. Niss og Jensen (2002) pointerer, at:

> Opdelingen af kompetencerne i to grupper skal imidlertid ikke overfortolkes der hen, at to kompetencer fra hver sin gruppe er mindre forbundne end to kompetencer fra den samme gruppe. (s. 46)

Med fare for at overfortolke, om end det ikke handler om kompetencetilknytningen til de to grupper, synes det interessant at bemærke, at sprog indgår i begge grupper af kompetencer. I den første gruppe, synes der at være tale om, at personen, der besidder kompetencen, bruger sit eget sprog til at kunne spørge og svare i og med matematik. Mens det i forhold til den anden gruppe kan handle om, at den person, der besidder kompetencen, kan håndtere matematikkens sprog og redskaber. Der er altså tale om at håndtere et sprog, der ligger uden for den person, der besidder kompetencen, men et sprog, der er indlejret i selve matematikken: "matematikkens sprog og redskaber". Denne tolkning knytter sig ikke som sådan til kompetencerne og kompetencesynet, men snarere til det matematiksyn en sådan formulering kan være udtryk for. Umiddelbart tolkes dette udsagn som, at matematikken har et sprog i sig selv og ikke, at matematikken er et sprog, der karakteriseres og defineres af forskellige grupper af sociale fællesskaber. På den baggrund kan det lidt karikeret hævdes, at matematiksynet i KOM-rapporten synes at læne sig op ad et mere platonisk eller kantiansk syn herpå. Johansen og Sørensen (2014) bekriver bl.a., at der ifølge Platon er et dualistisk forhold mellem fænomenverdenen (stoflig, foranderlig og endelig) og ideernes verden (ikke stoflig, uforanderlig og evig). De matematiske objekter tilhører den sidstnævnte, og vi erkender "matematikken med tankens kraft og ikke ved at bruge sanserne" (Johansen & Sørensen, 2014, s. 33). Ifølge Kant siger matematikken noget om, hvordan mennesker erfarer verden, ikke hvordan den er i sig selv – og matematiske sætninger er "absolut sande, eller sande med nødvendighed for alle mennesker, og ikke sande relativt til den person, der har bevist dem" (Johansen & Sørensen, 2014, s. 59). Eller som Skovsmose og Ravn (2011) skriver om Kants matematikfilosofi:

> Matematikken repræsenterer karakteristika ved vore "forstandsformer", som vi projicerer ud på det vi ser og oplever. Hermed bliver matematikken et karakteristikum, ikke ved naturen, men ved vores perspektiv på naturen. (s. 10-11)

Ud fra de ovenstående beskrivelser giver Platon og Kant udtryk for to forskellige syn på matematikken, men de har det tilfælles, at matematik synes at have en status af absolut sandhed. Det være enten i sig selv eller i kraft af den måde mennesker erfarer verden på, hvilket som tidligere nævnt synes at falde i tråd med KOM-rapportens udtryk "*matematikkens sprog og redskaber"*. Et andet syn, hvor matematikken ikke som sådan tillægges et sprog og redskaber a priori, er at finde hos den sene Wittgenstein:

> Wittgenstein påpegede, at der for et isoleret individ ikke er nogen forskel på faktisk at følge en regel korrekt og blot at tro, at man følger en regel korrekt. Hvis man skal tale om, at en person følger en regel, er det nødvendigt, at der er en instans uden for personen selv, der kan afgøre om reglen er fulgt korrekt eller ej. (Johansen & Sørensen, 2014, s. 110)

Johansen og Sørensen (2014) fremhæver endvidere, at der er forskellige fortolkninger af, hvad den sene Wittgenstein mener, men de henviser til Bloors (1983; 2002) tolkning heraf og skriver:

> Regelfølge og dermed matematik, er derfor i Bloors optik nødvendigt bundet op om sociale grupper. Kun igennem vores kontakt med en social gruppe er vi i stand til at etablere regler, der hverken afhænger af vores egne subjektive dispositioner eller af den fysiske virkelighed. (Johansen & Sørensen, 2014, s. 110)

Ud fra Johansen og Sørensens (2014) gengivelse af Bloors tolkning af den sene Wittgenstein er matematikken et sprog, der defineres af og verificeres af sociale grupper, sociale instanser, og ikke som sådan af matematikken selv eller af menneskets erkendelse heraf. Umiddelbart synes dette matematiksyn ikke at være det fremhærskende i KOM-rapporten. Jeg stopper i første omgang analysen her omkring matematiksynet i forhold til de to grupper, "*at kunne spørge og svare i og med matematik*" samt "*at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber*", men vender tilbage til det senere. De to grupper karakteriseres også af Niss og Jensen (2002) med forbehold, som værende et sæt "overkompetencer":

> Set fra et passende overordnet synspunkt kan evnen til at gebærde sig i og med matematik siges at bestå i netop disse to kapaciteter eller "overkompetencer", som så hver for sig ved nøjere konkretisering rummer et sæt specifikke kompetencer. (Niss & Jensen, 2002, s. 44)

Her er altså tale om et sæt overkompetencer i forhold til at gebærde sig *i* og *med* matematik. I forlængelse heraf kan det være hensigtsmæssigt at kigge nærmere på, hvordan overblik og dømmekraft karakteriseres.

#### 3.1.4. Overblik og dømmekraft

I KOM-rapporten beskrives tre forskellige former for overblik og dømmekraft: "a) matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder, b) matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning, og c) matematikkens karakter som fagområde" (Niss & Jensen, 2002, s. 67). De tre former for overblik og dømmekraft indgår ikke som sådan som en del af ph.d.-projektet, men de indgår i afhandlingen, dels i reveiwet med henvisning til de studier, der inddrager dem, og dels er de med til at skabe en forståelse for den kontekst, ræsonnementskompetencen må forstås indenfor. De karakteriseres som "en type "aktive indsigter" vedrørende matematikkens karakter og rolle i verden, som ikke har adfærdspræg i direkte forstand" (Niss & Jensen, 2002, s. 66).

Overblik- og dømmekraftform "a": "Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder" knytter sig til "anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af dagligdags, samfundsmæssig eller videnskabelig betydning" (Niss & Jensen, 2002, s. 67). Denne form for overblik og dømmekraft kan i nogen udstrækning siges at have paralleller til modelleringskompetencen og så adskiller den sig samtidig væsentligt herfra. I kommentaren til denne overblik og dømmekraftsform skriver Niss og Jensen (2002):

> Mens den tidligere beskrevne modelleringskompetence vedrører evnen til at handle i konkrete udenomsmatematiske situationer og problemstillinger, hvor matematikken bringes i spil, er der her snarere tale om en bred og sammenfattende form for overblik og dømmekraft af en nærmest sociologisk og videnskabsteoretisk art. (s. 67)

Niss og Jensen (2002) karakteriserer altså overblik- og dømmekraftform "a", som værende af nærmest sociologisk og videnskabsteoretisk art. På den baggrund kan KOM-rapporten også tolkes som at udgøre en teoretisk ramme, eller snarere en teori, der også inkluderer et sociologisk videnskabsteoretisk ståsted[14]. Ordet "art" kan dog tolkes som en forsigtighed i forhold hertil, eller som at KOM-rapporten ikke læner sig for fast op ad et eksisterende videnskabsteoretisk ståsted, men definerer sit eget.

Overblik- og dømmekraftform "b" definerer Niss og Jensen (2002) som: "Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning" og fokus er "på selve det forhold, at matematikken har udviklet sig, i kulturelle og samfundsmæssigt betingede miljøer, og på de drivkræfter og mekanismer som er ansvarlige for denne udvikling" (Niss & Jensen, 2002, s. 68). Det kan både tolkes som, at matematiksynet her enten falder i tråd med et syn på matematik, som noget der er a priori, eller som noget der opfindes af mennesker i forskellige tidsmæssige, kulturelle og samfundsmæssige miljøer. Den tidligere opridsede skelnen mellem matematik, som indeholdende et sprog eller værende et sprog, kan så siges at afhænge af, hvilket matematiksyn, læseren tillægger sin læsning af KOM-rapporten. På den baggrund kan den tidligere analyse, om at KOM-rapporten i udgangspunktet læner sig op ad et mere platonisk og kantiansk matematiksyn, nuanceres. Læseren kan lige såvel tillægge sin læsning af KOM-rapporten et mere Wittgenstein inspireret matematiksyn. Disse forskellige matematiksyn kan i sig selv være genstand for undersøgelse inden for denne form overblik- og dømmekraftform "b".

Selvom nærværende ph.d.-projekt ikke direkte knytter sig til overblik- og dømmekraftformerne, indeholder spændingsfeltet mellem originalkilder og GeoGebra implicit det forhold, "at matematikken har udviklet sig, i kulturelle og samfundsmæssigt betingede miljøer, og på

[14] Et syn på KOM-rapporten som en teori præsenteres også i forbindelse med overblik og dømmekraft "b" i Thomsen og Clark (in review), men med udgangspunkt i bl.a. Chevallards antropologiske teori om det diaktiske.

de drivkræfter og mekanismer som er ansvarlige for denne udvikling" (Niss & Jensen 2002, s. 68). Overblik- og dømmekraftform "b" kan siges at ligge implicit i nogle af opgavetyperne, der designes i forbindelse med projektet (se fx Thomsen & Clark, in review). Men der arbejdes ikke som sådan eksplicit med overbliksform "b" i ph.d.-projektet.

Niss og Jensen (2002) pointerer endvidere i kommentarerne til overblik- og dømmekraftform "b":

> Vi opererer ikke med en "matematikhistorisk kompetence" som en ingrediens i almen matematisk kompetence. Faktisk ville det være muligt at udpege og karakterisere en matematikhistorisk kompetence, men den må betragtes som for speciel til at høre hjemme i en generel sammenhæng. (s. 68)

I KOM-rapporten vurderes det altså, at overblik- og dømmekraftform "b" ikke anses for at være en matematisk kompetence, der hører til i en generel matematikuddannelsesmæssig sammenhæng. Denne betragtning omkring ikke at se en matematikhistorisk kompetence som en almen matematisk kompetence falder godt i tråd med synet på, hvordan matematikhistorie, herunder originalkilder, bruges i nærværende ph.d.-projekt. Der vendes tilbage hertil i afsnit 3.2.

Den sidste af de tre overblik- og dømmekraftformer er "Matematikkens karakter som fagområde". Om den fremhæver Niss og Jensen (2002) bl.a., at den omhandler de karakteristika, som gør matematik særegent som fagområde, og derved ikke de karaktertræk matematik har tilfælles med andre fagområder. Den adskiller sig også fra de andre overblik- og dømmekraftsformer ved, at "samtlige otte kompetencer bidrager til at forankre denne form for overblik og dømmekraft" (Niss & Jensen, 2002, s. 69). Den er den af overbliks- og dømmekraftsformerne, "som i størst udstrækning ligger i forlængelse af kompetencerne" (s. 69). I forlængelse heraf begiver Niss og Jensen (2002) sig alligevel ind i en udvælgelsesproces, når det handler om forholdet mellem matematiske kompetencer og denne form for overblik og dømmekraft. De skriver:

> Skulle man fremhæve nogle af kompetencerne, som bidragende i særlig grad til at skabe fundament for overblik og dømmekraft vedrørende de *særlige* træk ved matematik, må det blive tankegangs-, ræsonnements- og symbol- og formalismekompetencerne. (Niss & Jensen, 2002, s. 69)

Overblik- og dømmekraftform "c" kan også siges at være implicit i spil i ph.d.-projektet, eftersom der gennem et særligt fokus på ræsonnementskompetencen også arbejdes med, at originalkilderne og for den sags skyld også GeoGebra, kan ses som udtryk for forskellige forhold omkring notationer, matematisk argumentations- og bevisførelse, som er særegent for matematik som fagområde.

### 3.1.5. Ræsonnementskompetencen

Ræsonnementskompetencen er den centrale matematiske kompetence i nærværende ph.d.-projekt. Velvidende at den sjældent vil stå knivskarpt alene, men ofte være i spil i sammenhæng med nogle af de andre matematiske kompetencer. Ifølge Niss og Jensens (2002) består ræsonnementskompetencen i at kunne:

- (…) "*følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, specielt at vide og *forstå* hvad et matematisk *bevis* er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer, fx heuristiske ræsonnementer hvilende på intuition eller på betragtning af specialtilfælde, og at kunne afgøre hvornår et matematisk ræsonnement faktisk udgør et bevis, og hvornår ikke. Heri indgår at forstå den logiske betydning af et *modeksempel*."
- "*afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter (…)."
- "*udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser". (Denne punktform er en opdeling af beskrivelsen af ræsonnementskompetencen i Niss & Jensen, 2002, s. 54)

I ovenstående beskrivelse af ræsonnementskompetencen indgår også kompetencens duale karakter. Den undersøgende side omhandler bl.a. at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement og den produktive side handler bl.a. om at kunne udtænke og gennemføre informelle og formelle ræsonnementer. Niss og Jensen (2002) fremfører bl.a. følgende kommentar i forbindelse med deres beskrivelse af ræsonnementskompetencen:

> Af mange betragtes matematisk bevisførelse, men også matematisk ræsonneren i almindelighed, som en sag, der først og fremmest angår retfærdiggørelsen af matematiske sætninger, endda ofte i form af ren og skær gengivelse af færdige beviser. Ræsonnementskompetencen omfatter også dette, men går videre, idet den kommer i spil overalt, når det gælder om at bedømme holdbarheden af matematiske påstande, inklusive at overbevise sig selv eller andre om den eventuelle gyldighed af sådanne. Det kan dreje sig både om reglers og sætningers rigtighed, men også om godtgørelsen af, at givne svar på spørgsmål, opgaver, eller problemer er korrekte og fyldestgørende. (Niss & Jensen, 2002, s. 54)

Niss og Jensen (2002) lægger altså vægt på, at en del af ræsonnementskompetencen er at kunne overbevise sig selv og andre om den eventuelle holdbarhed og gyldighed af matematiske sætninger, påstande og svar på opgaver. Det dækker en bred forståelse af, hvad matematisk ræsonneren angår. I det første punkt i beskrivelsen af ræsonnementskompetencen, karakterise-res et ræsonnement som en kæde af argumenter. Det kan tolkes som, at et argument ses som noget enkeltstående, og et ræsonnement består af flere på hinanden følgende argumenter. Niss og Jensen (2002) giver også bud på, hvad der karakteriserer et bevis. Herom skriver de bl.a.: "(…) derefter at levere korrekte og fuldstændige argumenter (beviser) for at de foreslåede løsninger virkelig virker, (…)" (Niss & Jensen, 2002, s. 64). En yderligere skelnen mellem ræsonnement og beviser går altså på korrekt- og fuldstændigheden af den kæde af argumenter, der fremføres.

## 3.2. Ræsonnementskompetencen, Fælles Mål og historisk bevidsthed

I indledningen af KOM-rapporten pointeres det, at der ikke bindes an med en speciel tilknytning til et alment dannelsesbegreb eller matematikfagets eventuelle bidrag hertil:

> Projektet [KOM] går ikke ud på at karakterisere eller diskutere dannelse i almindelighed eller matematikfagets aktuelle og potentielle bidrag til udviklingen af en sådan. Det er naturligvis af stor betydning at kunne udrede disse forhold, det kan blot ikke finde sted i denne sammenhæng. (Niss & Jensen, 2002, s. 20)

I en dansk uddannelsesmæssig kontekst medfører det, at det vil være yderst hensigtsmæssigt at sammenholde de dele, man benytter af KOM-rapporten med de styredokumenter, der på et givent tidspunkt foreligger for de forskellige matematikuddannelser. I et ph.d.-projekt som dette, hvor et af de inddragede forskningsfelter er matematikkens historie kan det også overordnet være givtigt at anlægge et overordnet historiesyn, som læsningen af fx styredoku-menterne og designet af forløb og opgaver læner sig op ad. Kjeldsen et al. (in press) refererer til Jensen (2011), som giver et bud på et historiesyn, der bliver brugt i forhold til historiefaget på gymnasieniveau i en dansk uddannelseskontekst. Denne historiebevidsthed udspringer af et socialkonstruktivistisk historiesyn (Jensen, 2011). Her anses historie ikke for at være noget, som kun har at gøre med fortiden, det omfatter både fortid, nutid og fremtid og forbindes til, at mennesker, enten som individer eller som grupper, interesserer sig for at bruge fortid i en nutidig kontekst (Kjeldsen et al., in press). Jensen (2011) karakteriserer det som et opgør med begreber som "historie(en)" og "fortid(en)". Det kan yderligere understreges med et citat fra Jensen (2011):

> Fagfolk, der tænker anderledes herom, gør brug af et helt andet afsæt. Deres startpunkt er ikke en fremstilling af, hvordan fagfolk udforsker noget fortidigt; de analyserer derimod, hvordan historie (i betydningen historisk-sociale processer) frembringes – dvs. hvad der på engelsk betegnes 'making historie' og på tysk 'Geschichte machen'. Udgør dette ens udgangspunkt, er det ikke længere sagligt forsvarligt at sætte lighedstegn mellem 'historie' og 'fortid'. I stedet må historie vedrøre det sagforhold, at vi mennesker lever og virker i tid og rum. (Jensen, 2011, s. 199)

Kjeldsen et al. plæderer for, at dette historiesyn også kan bruges inden for det matematikhistoriske forskningsfelt. I forhold til arbejdet med afprøvningerne i ph.d.-projektet betyder et sådant historiesyn bl.a., at eleverne og lærerens arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra ses som et forsøg på at skabe et særligt rum, hvor de involverede igennem deres aktive handlinger også ses som fortolkere, men også skabere af spændingsfeltet mellem fortid, nutid og fremtid.

Når man fx arbejder med at give eleverne mulighed for at udvikle matematisk ræsonnementskompetence i forbindelse med arbejdet med geometri, skal det også ses i lyset af Folkeskolens formålsparagraf og Fagets formål. Inden for rammen af Fælles Mål samtænkes Folkeskolens formålsparagraf, Fagets formål, de matematiske kompetencer samt stofområder. Folkeskolens formålsparagraf lyder således:

> § 1. Folkeskolen skal i samarbejde med forældrene give eleverne kundskaber og færdigheder, der: forbereder dem til videre uddannelse og giver dem lyst til at lære mere, gør dem fortrolige med dansk kultur og historie, giver dem forståelse for andre lande og kulturer, bidrager til deres forståelse for menneskets samspil med naturen og fremmer den enkelte elevs alsidige udvikling.
>
> Stk. 2. Folkeskolen skal udvikle arbejdsmetoder og skabe rammer for oplevelse, fordybelse og virkelyst, så eleverne udvikler erkendelse og fantasi og får tillid til egne muligheder og baggrund for at tage stilling og handle.
>
> Stk. 3. Folkeskolen skal forberede eleverne til deltagelse, medansvar, rettigheder og pligter i et samfund med frihed og folkestyre. Skolens virke skal derfor være præget af åndsfrihed, ligeværd og demokrati. (Retsinformation)

Hvis Folkeskolens formålsparagraf sammenholdes med nærværende ph.d.-projekt er det værd at fremhæve, at et særligt fokus på ræsonnementskompetencen kan bidrage til at forberede elever til videre uddannelse. Det bidrag bliver formentligt ikke mindre af, at ræsonnements-kompetencen sammenknyttes med brug af digitale teknologier. Samtidig kan valg af forskellige originalkilder bidrage til at gøre eleverne fortrolige med dansk kultur og historie samt give dem forståelse for andre lande og kulturer. Som tidligere nævnt kan brugen af matematikkens historie have almendannende karakter og ses som et mål i sig selv (Jankvist, 2007; 2009). Det har ikke i sig selv været målet med dette ph.d.-projekt, men en del af målet er at se, om der gennem forløbs- og opgavedesign også kan skabes mulighed for et dannelsesrum, der understøtter elevernes refleksioner omkring dem selv, som værende en del af et nutidigt lokalt matematisk fællesskab, der kan ses som influeret af fortid og som springbræt for fremtid. Det skal ikke ses som et kausalt forhold, men som forskellige tilgange, der skaber forskellige mulighedsrum. Her kan fx originalkilder og digitale teknologier blive repræsentanter for et sådant spændingsfelt, et givet mulighedsrum, der understøtter elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence i arbejdet med digitale teknologier. I designet forsøges det at medtænke vigtigheden af at skabe muligheder for, at eleverne kan fordybe sig i at øve sig i at ræsonnere i forbindelse med det faglige stof, der er omdrejningspunktet i de udvalgte originalkilder. Som nævnt i reviewet er originalkilder oftest svære at læse for elever, hvorfor det også er vigtigt at holde sig for øje at skabe et undervisnings- og læringsrum, hvor det legaliseres, at det er svært og at det handler om at øve sig i at ræsonnere og argumentere. Der skal skabes et rum, hvor eleverne ikke mister modet, men vedbliver med at forsøge, også selvom det kan synes svært – det skal forsøges at understøtte, at eleverne får oplevelsen af at være kreative og får tillid til egne muligheder i forhold til at udvikle matematiske ræsonnementer i forbindelse med deres brug af GeoGebra. Det, at eleverne bliver præsenteret for to så forskellige tilgange til at arbejde med det samme matematiske indhold, giver dem måske også begyndende muligheder for at tage stilling og handle i forhold til dem selv som brugere af digitale teknologier, når de arbejder med at løse forskellige matematiske opgaver. I forhold til stk. 3 fokuseres der i dette ph.d.-projekt særligt på at skabe rum for ligeværdige matematiske diskussioner. Om end selve det at arbejde med originalkilder og GeoGebra har et langt større potentiale end dette i forhold til at tale om "åndsfrihed, ligeværd og demokrati", eftersom der også i højere grad kan fokuseres på indholdet i kilderne, de historiske kontekster, de er skrevet i, hvad der gør, at de er blevet trykt og oversat med videre.

Hvis blikket vendes mod Fagets formål, så lyder det, som følger:

> Eleverne skal i faget matematik udvikle matematiske kompetencer og opnå færdigheder og viden, således at de kan begå sig hensigtsmæssigt i matematikrelaterede situationer i deres aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv.

> Stk. 2. Elevernes læring skal baseres på, at de selvstændigt og gennem dialog og samarbejde med andre kan erfare, at matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation.
>
> Stk. 3. Faget matematik skal medvirke til, at eleverne oplever og erkender matematikkens rolle i en historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng, og at eleverne kan forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse med henblik på at tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk fællesskab. (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 5)

Hovedomdrejningspunktet i projektet er at give eleverne mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, så den del af stk. 1 er repræsenteret. Selvom, det måske ikke synes eksplicit og indlysende, kan den resterende del af stk. 1, måske med undtagelse af fritidsliv, siges at indgå i projektet, eftersom de fleste elever på sigt vil deltage og arbejde i forskellige uddannelses-, arbejds- og samfundsliv, hvor de kan få glæde af at kunne ræsonnere i forbindelse med deres brug af digitale teknologier.

Stk. 2 synes på mange måder at være helt centralt i projektet, eftersom matematisk argumentation er en af hjørnestenene i ræsonnementskompetencen. De øvrige dele af stk. 2 medtænkes også i designet af opgaverne samt i måden de forskellige arbejdsmetoder og dialoger organiseres på undervejs i afprøvningerne. I reviewet refereres bl.a. til Glaubitz (2010), som påpeger, at arbejdet med en hermeneutisk tilgang til matematikkens historie kan bidrage til at vække elevernes epistemiske nysgerrighed. Det anses i projektet for bl.a. at være en mulig brik i forhold til at skabe rum for kreativ matematisk udfoldelse.

Stk. 3 er også fremtrædende i ph.d.-projektet. I første omgang fokuseres der på elevernes udvikling af deres ræsonnementskompetence. Her ses den historiske bevidsthed som et middel til at understøtte elevernes mulighed herfor. Elevernes arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra skal netop ses som et mulighedsfelt, hvor de kan opleve og erkende "matematikkens rolle i en historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng". Eleverne kan ved at arbejde med samspillet blive sat i situationer, hvor de skal forholde sig vurderende til måden, de som elever ved brug af de redskaber, der er tilgængelige i grundskolen anno 2019-2021, får mulighed for at arbejde med matematik. I ph.d.-projektet er der særligt fokus på "den rene matematik" i forbindelse med geometri, men måske kan eleverne på sigt også overføre nogle af deres erfaringer herfra, hvis de bliver sat i matematiske situationer, hvor de skal bruge digitale teknologier i forbindelse med matematik i anvendelse. Dertil kommer, at det at have fokus på at ræsonnere på forskellige måder, at skulle argumentere matematisk og overbevise sig selv og andre, når der arbejdes med digitale teknologier, også kan ses som en brik i forhold til at understøtte, elevernes muligheder for at kunne "tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk fællesskab". Den historiske bevidsthed ses altså ikke som en "matematikhistorisk kompetence" (jf. afsnit 3.1.4.), men som en bevidsthed, der medvirker til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med digitale teknologier og derigennem bidrage til at understøtte fagets formål.

I sammenhæng med Fagets formål og Folkeskolens formål er Fælles Mål for grundskolen bygget op om en kompetencetænkning med fokus på både matematiske kompetencer og stofområder. De er så at sige bygget op om en matrixstruktur, hvor kompetencer og stofområder har forskellige under områder, også kaldet færdigheds- og vidensområder. De matematiske kompetencer lægger sig tæt op ad kompetencerne fra KOM-rapporten, dog med nogle få undtagelser, fx er "Ræsonnement og tankegang" slået sammen. Det er "Symbol og repræsentationer" også. Derudover indgår formalisme ikke i Fælles Mål. Stofområderne i Fælles Mål er: 1) Tal og algebra, 2) Geometri og måling samt 3) Statistik og sandsynlighed. Ligesom der i Læseplanen for faget matematik under "Fagets formål og identitet" står:

> Det er hensigten, at læreren sammentænker matematisk stof og matematiske kompetencer i undervisningen. (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 6)

I forhold til Fælles Mål bliver omdrejningspunktet i ph.d.-projektet hovedsageligt, at den matematiske kompetence, der her kaldes "Ræsonnement og tankegang" bliver sammentænkt med færdigheds- og vidensområder inden for stofområdet "Geometri og måling". I selve matrixstrukturen ligger der et didaktisk arbejde og en frihed for læreren og opgave- og undervisningsdesignere i at koble matematiske kompetencer og stofområder i forskellige undervisningsforløb. Matrixstrukturen præsenteres også i KOM-rapporten (se fx s. 114 heri). Fælles Mål for faget Matematik er opdelt i tre matricer, én der er rettet mod 1-3. klassetrin, én der er rettet mod 4.-6. klassetrin og én der er rettet mod 7.-9. klassetrin. I ph.d.-afhandlingen er der hovedsageligt fokus på at benytte den målmatrix, der er rettet mod mellemtrinnet, men i afprøvning 2 bliver der også skelet til målmatrixen rettet mod udskolingen. I den forbindelse er det vigtigt at slå fast, at brugen af Fælles Mål som en af de overordnede rammer for projektet også indebærer at forholde sig til, at "Ræsonnement og tankegang" er slået sammen heri (se evt. Thomsen og Jankvist, in press). Selvom afprøvningerne også tager udgangspunkt i Fælles Mål er det hovedsageligt kompetencebeskrivelserne fra KOM-rapporten, der udgør grundlaget for analyserne i afhandlingen. For de videre analyser i afhandlingen betyder det, at hovedfokus er på ræsonnementskompetencen, men at tankegangskompetencen inddrages i det omfang, det giver mening i forhold til de matematikholdige situationer, der præsenteres. Tankegangskompetencen omfatter bl.a.:

> (…) at *kende, forstå* og *håndtere* givne matematiske begrebers rækkevidde (og begrænsning) og deres forankring i diverse domæner, i at kunne udvide et begreb ved *abstraktion* af egenskaber i begrebet, i at kunne *forstå* hvad der ligger i *generalisering* af matematiske resultater, og selv at kunne generalisere sådanne til at omfatte en større klasse af objekter.
>
> Denne kompetence omfatter også det at kunne *skelne,* både passivt og aktivt, mellem mellem *forskellige slags matematiske udsagn* og påstande, herunder "betingede udsagn", "definitioner", "sætninger", "fænomenologiske påstande" om enkelttilfælde, og "formodninger" baseret på intuition eller erfaringer med specialtilfælde. (Niss & Jensen, 2002, s. 47)

Der er særligt to beskrivelser i KOM-rapporten, som ph.d.-projektet forsøger at udfordre. I KOM-rapporten står der bl.a. omkring ræsonnementskompetencen:

> Når det gælder *ræsonnementskompetencen* indgår det at kunne afdække de bærende idéer i et matematisk bevis ikke i grundskolen. Et par forhold vedrørende forbindelsen mellem ræsonnementer generelt og matematiske beviser som specialtilfælde indgår kun i karakteristikken i form af en forventning om eksemplariske erfaringer. Det er tilfældet med hensyn til det at vide og forstå, hvad et matematisk bevis er, samt det at kunne omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser. På mellemtrinnet og ned omfatter karakteristikken ikke det at kunne bedømme et matematisk ræsonnement, kun at kunne følge og forholde sig til et sådant. (Niss & Jensen, 2002, s. 194)

I planlægningen og analyserne af afprøvningerne tages der bevidst udgangspunkt i ræsonnementskompetencens duale karakter. Det gøres bl.a. med udgangspunkt i originalkilder, der omhandler ræsonnementer og beviser. Derved er der også fokus på, hvilke muligheder og udfordringer mellemtrinselever møder, når de også øver sig i at kunne afdække bærende ideer i beviser og bedømme et matematisk ræsonnement. Om tankegangskompetencen står der bl.a.:

> *Tankegangskompetencen* er for grundskolen som helhed kun dækningsgradsmæssigt afgrænset i forhold til grundkarakteristikken ved ikke at omfatte abstraktion af egenskaber i matematiske begreber. På mellemtrinnet og ned omfatter karakteristikken ikke generalisering af matematiske resultater, ligesom der kun fordres en lejlighedsvis aktiv skelnen mellem definitioner og sætninger, ikke en mere udbygget og detaljeret forståelse af forskellen mellem forskellige slags udsagn og deres status. (Niss & Jensen, 2002, s. 194)

I nærværende ph.d.-projekt fokuseres der netop på, at eleverne skal øve sig i at generalisere matematiske resultater, så det forsøges også at udfordre denne begrænsning i forhold til mellemtrinnet.

## 3.3. De fire teoretiske distinktioner

I dette afsnit beskrives de fire teoretiske distinktioner, én for én, som bliver brugt i forskellige kombinationer i afhandlingen.

### 3.3.1. Ræsonnementskompetencens duale karakter

Ifølge KOM-rapporten har alle de 8 matematiske kompetencer altså en dual karakter, en undersøgende og en produktiv side. Det gælder også for ræsonnementskompetencen. Derfor bliver det afgørende, at der skabes mulighedsrum for eleverne for både at udvikle den undersøgende og produktive side af deres ræsonnementskompetence. Her kan elevernes arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra bidrage med noget særligt. Arbejdet med originalkilden lægger op til, at eleverne undersøger og følger argumenter, ræsonnementer eller beviser. Samtidig med, at eleverne ved at arbejde med GeoGebra både i forhold til at undersøge indholdet i originalkilden og selv udforme argumenter, ræsonnementer og beviser ligeledes arbejder med den produktive side af ræsonnementskompetencen. Det er ikke i sig selv givet, men et potentiale, der ligger i at arbejde med samspillet (Thomsen, 2021a). Derfor er denne distinktion både vigtig i forhold til at planlægge og analysere afprøvninger.

### 3.3.2. Pragmatisk, retfærdiggørende og epistemisk mediering

I dette afsnit vil der i udfoldelsen af termerne: Epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering både indgå eksempler fra Misfeldt og Jankvist (2018), Jankvist og Misfeldt (2019) samt Jankvist et al. (2019) heromkring. Jankvist et al. (2019) beskriver, at Misfeldt og Jankvists (2018) definitioner af de tre former for medieringer bl.a. udspringer af hhv. Harel og Sowders (2007) teori om overbevisningsskemaer, Artigues (2002) beskrivelse af pragmatisk og epistemisk værdi og Trouches udlægning af instrumentel genese og brug af skemaer, som hviler på Vergnauds og Piagets beskrivelse af skemaer samt Rabardels (1995) beskrivelse af mediering og instrumentel genese. Trouche bygger på Piagets og Vergnauds brug af skemaer, som en psykologisk indgang til instrumentel genese. Her ses skemaer bl.a. som en væsentlig forbindelse mellem rettet handling, gestus, og tanke (Trouche, 2016, s. 237). Trouche definerer teknikker som “sets of gestures realized in the execution of a task on an instrument; instrumented techniques are techniques involving artefacts and are thus the gestures of instrumented action schemes" (Monaghan 2007, s. 65). Inden for denne forståelse kan den instrumentelle genese beskrives som den dialektiske relation mellem redskab og skema. Teknikkerne er tegnene på subjektets handlinger og tanker i interaktion med redskabet, artefaktet. Trouche (2005) beskriver bl.a., hvordan et artefakt kan blive et personligt instrument igennem processen instrumentel genese. Denne proces definerer han bl.a. som:

> (…) instrumental genesis is a process (therefore *needs time*) and has two components, the first one (*instrumentalization*) directed toward the artifact, the second one (*instrumentation*) directed toward the subject (…). (Trouche, 2005, s. 145)

Ifølge Trouche har skemaer tre funktioner i forhold til subjektet: 1) En pragmatisk funktion, til at gøre noget, 2) en heuristisk funktion, til at foregribe og planlægge handlinger og 3) en epistemisk funktion, at forstå noget (Monaghan, 2007). Her er det vigtigt at pointere, at disse bl.a. adskiller sig fra Jankvist og Misfeldts (2018) beskrivelser af medieringer ved, at sidstnævnte decideret er rettet mod arbejdet med ræsonnementer og beviser. Misfeldt og Jankvist (2018) har arbejdet med de tre distinktioner: Pragmatisk, retfærdiggørende og epistemisk mediering i forhold til brug af CAS. Jankvist og Misfeldt (2019) karakteriserer de tre former for medieringer på følgende måde:

> Rather it makes sense to distinguish between three critical mediations of CAS (Misfeldt & Jankvist, 2018):
>
> 1. CAS use for justification (justificational mediations),
>
> 2. CAS use for conveying meaning and understanding (epistemic mediations), and
>
> 3. CAS use for solving tasks or satisfy other external needs (pragmatic mediations). (s. 239)

Retfærdiggørende mediering er knyttet til beviser, som ikke forklarer, men kun beviser. Herunder hører de eksterne overbevisningsskemaer (Harel og Sowder, 2007). Her kan fx være tale om, at det er læreren eller lærebøger, der udgør en autoritet i forhold til overbevisningskraften i bevisets gyldighed (Harel & Sowder, 2007) eller CAS kan udgøre en lignende autoritet – beviset gælder, fordi CAS viser det (Jankvist & Misfeldt, 2019). Ses dette i relation til arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra, kan der fx være tale om ud fra Harel og Sowders (2007) definition, at elever og lærere retfærdiggør et bevis, fx blot fordi Euklid skriver, det er det, eller at elever og lærere retfærdiggør en påstand blot fordi, GeoGebra viser det (se fx Mason, 1991).

Pragmatisk mediering er ifølge Misfeldt og Jankvist (2018) knyttet til en eller flere af overbevisningsskemaerne, herunder det empiriske overbevisningsskema, som ifølge Harel og Sowder (2007) omfatter induktive og perceptuelle overbevisningsskemaer. Misfeldt og Jankvist (2018) brugte de tre medieringer i forhold til analyser af brug af CAS i lærebogssystemer. I ph.d.-projektet bruges de tre former for medieringer i forhold til at analysere opgaver i forhold til samt elevernes arbejde med et dynamisk geometriprogram, GeoGebra. Det betyder, at man som forsker og lærer må medtænke den form for visualisering GeoGebra tilbyder (Thomsen & Jankvist, 2020). Det giver nogle andre betingelser for at medtænke intuition og sprog i forhold til at arbejde med samspillet med henblik på at understøtte udvikling af elevernes ræsonnementskompetence end det ville gøre, hvis CAS blev brugt. De geometriske konstruktioner, der udføres i GeoGebra kan udgøre eksempler, der virker overbevisende i sig selv. På baggrund af reviewet kan det synes som om, dragging kan spille en særlig rolle, når det handler om at skabe matematiske situationer, hvor elevers arbejde med GeoGebra kan udgøre muligheder fra at gå fra at udgøre en pragmatisk mediering til en epistemisk mediering.

Jankvist og Misfeldt (2019) refererer til Hanna (1990) i forhold til at karakterisere, at epistemisk mediering er knyttet til beviser, der forklarer og til Harel og Sowders (2007) deduktive overbevisningsskemaer. I forhold til nærværende afhandling kan det være betydningsfuldt at udfolde Harel og Sowders (2007) definition af deduktive overbevisningsskemaer. De beskriver to forskellige klassifikationer heraf: Det aksiomatisk deduktive og det transformerende overbevisningsskema. Sidstnævnte er karakteriseret ved generalitet, operationel tænkning og logiske slutninger. Arbejdet med fx *Euklids Elementer* og brugen af GeoGebra kan umiddelbart synes at understøtte elevernes muligheder for at forstå uddrag af Elementerne og på den baggrund stifte bekendtskab med aksiomatisk deduktive beviser samt få en begyndende forståelse herfor. Ligesom det arbejde kan have potentialet til at understøtte elevernes muligheder for selv at forstå og udføre aksiomatisk deduktive beviser. Hvis elever eller elever og lærere i fællesskab ikke når helt i mål med at forstå og udføre et aksiomatisk deduktivt bevis, kan de alligevel med udgangspunkt i opgaverne, der er knyttet deres arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra opnå at arbejde med at forsøge at operationalisere, generalisere og drage logiske slutninger. Det gælder også selvom de ikke gennemfører en kæde af sammenhængende eller på hinanden følgende argumenter, på baggrund af hvilke de kan udføre logiske slutninger. Når der er tegn herpå, tolkes det fremadrettet som, at de opgaver, eleverne arbejder med, og den dialog de har heromkring, understøtter en udvikling og udfoldelse af transformerede overbevisningsskemaer.

Det kan også være givende at fremhæve Harel og Sowders (2007) brug af begreberne “ascertaining” og “persuading”. Om dem skriver de bl.a:

> *Ascertaining* is the process an individual (or a community) employs to remove her or his (or its) own doubts about the truth of an assertion. *Persuading* is the process an individual or a community employs to remove others’ doubts about the truth of an assertion. (Harel & Sowder, 2007, s. 808)

Ifølge Harel og Sowder består bevisprocessen af begge dele, at kunne overbevise sig selv og at kunne overbevise andre. I ph.d.-projektet lægges der vægt på, at eleverne i deres arbejde med matematiske argumenter og ræsonnementer bliver sat i situationer, hvor de også skal overbevise sig selv i deres samarbejde med andre.

Misfeldt og Jankvists (2018) distinktion mellem pragmatisk, retfærdiggørende og epistemisk mediering kan medvirke til at skærpe planlægning af opgaver og forløb, der indeholder brug af digitale teknologier, og hvor målet er at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Det synes også at gælde, når der er fokus på, at eleverne skal arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra (se fx Thomsen & Jankvist, 2020). Derfor bliver disse distinktioner både brugt som planlægnings- og analyseredskab i forhold til afprøvningerne (jf. kapitel 4 og 6), mens de i lærebogsanalysen bliver brugt som analyseredskab (jf. kapitel 5).

### 3.3.3. Dynamisk og statisk læsning

Mellin-Olsen (1984) opererer bl.a. med en distinktion mellem statisk og dynamisk læsning. Statisk og dynamisk læsning ses i dette projekt både i forhold til selve det at læse og bruge originalkilder, men også at læse de repræsentationer GeoGebras feedback giver mulighed for at “læse”. Mellin-Olsen (1984) refererer til semiologien og giver på den baggrund en bred definition af systemer af tegn:

> Vi må analysere begrepet *skrifttegn* i og med at teorikunnskaper først og fremst assosieres med papir-og-blyant-kunnskaper. I vitenskapen om tegnenes liv, *semiologien*, bliver tegn definert vidt. Det er tale om skrifttegn, språktegn, kroppstegn, musiktegn, billedtegn osv. Systemer av tegn kan udgjøre *språk*: talespråk, skriftspråk, kroppsspråk, musikkspråk, billedspråk osv. (Mellin-Olsen, 1984, s. 80)

Ud fra dette syn på tegn kan originalkilder og GeoGebra ses som to forskellige muligheder for at arbejde med forskellige tegnsystemer. Umiddelbart kan man fremhæve, at de originalkilder, der arbejdes med i ph.d.-projektet i høj grad er baseret på skrift- og sprogtegn, der til tider er understøttet af et billedsprog. Sidstnævnte er af didaktiske årsager flere gange taget ud af de opgaver, der knytter sig til elevernes arbejde med originalkilden, således at eleverne selv konstruerer deres eget understøttende billedsprog ved hjælp af GeoGebra. GeoGebra har nogle muligheder og begrænsninger i forhold til det billedsprog, eleverne kan konstruere heri ved brug af GeoGebras "knapper", fordi den euklidiske geometri er inkluderet i den måde programmet er designet på (Thomsen, 2020). De billedtegn GeoGebra stiller til rådighed, kan på baggrund af lærernes og elevernes sammensætning heraf, når de konstruerer forskellige geometriske figurer, udgøre et billedsprog, som ikke i sig selv er ledsaget af et understøttende meningsskabende skrift- og talesprog. Det skal lærere og elever selv producere undervejs i arbejdet hermed. Ifølge Mellin-Olsen (1984) knyttes det, at eleven kan bruge tegn fleksibelt i fx problemsituationer til, at eleven forstår den matematiske sammenhæng, tegnet indgår i. Det synes som om, der er et potentiale i forhold til bevidst at arbejde med at udvikle elevernes muligheder for at kunne bruge tegn fleksibelt. Her kan distinktionen mellem begreberne dynamisk og statisk læsning at være velegnet til at få blik herfor. Mellin-Olsen (1984) refererer til den tyske fagdidaktiker Michael Otte, som studerede det klassiske lingvistiske problem omkring, hvorvidt det er tegnet, der giver mening til den, som læser det, eller om det er læseren, som giver mening til tegnet:

> Otte og hans medarbejdere studerte først trykkekunstens historie. De fant et markert skille med Gutenbergs oppfinnelse av den fleksible satsen (1428). Før Gutenberg hadde teksten stor autoritet. Begrepene og teoriene ble knyttet til bestemte fremstillinger, fordi det var få muligheter til å variere satsen. Ofte ble kunnskapene knyttet til bestemte personer. Tegnopfatningen var *bokstavelig* (litteral), det var først og fremmest forfatterens bruk av tegnet som gav leseren mening. (Mellin-Olsen, 1984, s.86)

På den baggrund definerer Mellin-Olsen den dynamiske læsning som, at "Leseren bruker sin egen forståelse når han leser, og han bruker den når han oppfatter innholdet i teksten" (Mellin-Olsen, 1984, s. 86). Her fremhæver Mellin-Olsen, at den læsemåde står i modsætning til den statiske læsning, "der gjør tegnet til autoritet. Det er tegnet og forfatterens bruk av det, som alene gir mening til tegnet" (s. 86). En af pointerne ved den dynamiske læsning er at give eleverne ejeskab til teksten ved at give dem mulighed for at gå i dialog med teksten. Netop her er der også et potentiale i at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra, da originalkilderne ofte er skrevet i et sprog, hverken elever eller lærere er helt familiære med at bruge. Derfor kræver det i sig selv et forståelsesarbejde, som kan knytte sig til en forståelse af selve de ord, sætninger og notationer, der benyttes i teksten. I forlængelse heraf kan det også knytte sig til at opbygge en forståelse af indholdet og ydermere en forståelse, der også fordrer, at elever eller lærere forholder sig hertil. Hvis der hovedsageligt er tale om, at elever og lærere søger og opnår en forståelse af de ord, sætninger og notationer, der indgår i originalkilden, kan det karakteriseres som en statisk læsning af teksten, eftersom det stadig først og fremmest er en forståelse af forfatterens brug af tegnet, der er målet med læsningen. Hvis dette forståelses-arbejde også indeholder, at elever og lærere forholder sig til originalkildens indhold og begynder at gå i dialog hermed ved fx at forholde sig spørgende til, om det nu også kan passe eller ved at bruge originalkilden som afsæt til en videre dialog omkring indholdet, kan det karakteriseres som hørende ind under en dynamisk læsning. Det synes ikke som, Mellin-Olsen (1984) med dynamisk læsning mener, at elever og lærere kan tolke, hvad som helst ud fra teksten og tillægge den sin helt egen betydning. Frieds (2007) skelnen, med reference til Saussure (1974), mellem en synkron og diakron beskrivelse af sprogsystemer i forbindelse med at arbejde med matematikhistorie kan yderligere bidrage til en forståelse af at arbejde med sprogsystemer i en kontekst, hvor der er fokus på at arbejde med samspillet mellem original-kilder og GeoGebra, da det i nogen udstrækning kan være med til at eksplicitere denne skelnen. Ligesom den kan siges at være med til at skabe rammerne om et fortolkningsspændingsfelt i elevernes mulige dynamiske læsning af både originalkilder og GeoGebra. Forskelle og ligheder mellem tegnbrug og tegnforståelse i hhv. læsning og brug af matematik i en originalkilde og GeoGebra kan ses i lyset af, at de historiske forskelle tillægges værdi og skaber nye fortolk-ningsrum og dermed nye mulighedsrum for at ræsonnere. Dette kan fx gøre sig gældende, hvis dragging eller målefunktionen i GeoGebra tages i brug. En sådan brug af GeoGebra kan bruges til at gå i dialog med teksten, ligesom teksten her kan understøtte, at elever og lærere kan gå i dialog med feedbacken fra GeoGebra.

### 3.3.4. Regel- og strukturopfattelse

Ifølge Mellin-Olsen (1984) kan en regelopfattelse inden for matematik beskrives som "kunnskapen om hvordan matematikken brukes i praksis, som regler og prinsipper" (Mellin-Olsen, 1984, s. 32). Mellin-Olsen fremhæver, at en modsætning hertil er "forståelsen av hvordan reglen er knyttet til sin struktur, det vil si, hvorfor reglen har blitt slikk den har blitt. Dette kaller vi i det følgende for *strukturopfatning*, i motsetning til *regeloppfatning*" (Mellin-Olsen, 1984, s. 32). Mellin-Olsen pointerer yderligere, at matematik er et struktureret fag. Det kan være forklaringen på, at undervisningen heri ofte har strukturforklaringer som et mål: "Resultaterne hænger sammen, det ene kan afledes af det andet og ved hjælp af fagets slutningsregler kan man udlede nye slutningsregler, som man har brug for" (Mellin-Olsen, 1984, s. 36). Hvis man sammenholder disse definitioner med Mellin-Olsens beskrivelse af teorier inden for matematikken, synes disse også at kunne relateres til både ræsonnementer og brugen af GeoGebra, om end det ikke kan siges at have været sigtet for Mellin-Olsen. Han skriver med reference til Otte bl.a.:

> Otte sier at det nettopp er disse sammenhengene eller relasjonene mellom delene av figuren som utgjør den teoretiske kunnskapen. Slik bliver teoretiske kunnskaper også dynamiske. Kunnskapene omfatter forhold og relasjoner mellem objekter, de gjelder ikke objektene isolert.
>
> En teori er derfor et system av relasjoner, der en beskriver sammenhengen innefor systemet. Sagt på en annen måte: Teoretiske kunnskaper er ikke ideer som er i ro. De samler seg om ideer som beveger seg i forhold til andre ideer. (Mellin-Olsen, 1984, s. 96)

Mellin-Olsen (1984) fremhæver altså, at forståelsen af det teoretiske baserer sig på relationerne eller sammenhængene mellem delene af figuren, forståelsen knytter sig ikke til isolerede objekter. I ovennævnte citat henvises til dele af figurer, hvilket passer godt ind i en geometrisk sammenhæng, men det skal formentligt også ses i en mere overført betydning. Så det også gælder inden for andre dele af de matematiske områder, måske kan en oversættelse af figur her være "et mønster", forstået som et mønster bag forskellige matematiske påstande. Her er det altså ikke et fokus på de enkelte delelementer af mønstret, der i sig selv understøtter en udvikling af en forståelse for teorien, men et fokus på relationerne, strukturerne i mønstret, der understøtter en teoretisk forståelse. Hvis det sammenholdes med de to begreber regelopfattelse og strukturopfattelse, kan førstnævnte knyttes til arbejdet med de isolerede objekter, mens sidstnævnte kan knyttes til arbejdet med at se og forstå relationerne, strukturerne, bag reglerne. Hvis dette ses i relation til at arbejde med GeoGebra, kan det forhold, at euklidisk geometri er indlejret i opbygningen af GeoGebra give nogle udfordringer i forhold til at arbejde med ræsonnementer (Thomsen, 2021a). Hvis Mellin-Olsens termer overføres til brugen af GeoGebra, kan man sige, at der i GeoGebra er rige muligheder for at koble enkeltobjekterne i form af fx at benytte dragging, at se på både den geometriske repræsentation og den algebraiske repræsentation osv. Det giver dog bare ikke sig selv, at eleverne får adgang til strukturerne bag disse koblinger. Det skal der arbejdes med både i design af opgaver, undervisningsforløb og dialoger undervejs i et sådant. I KOM-rapporten defineres ræsonnementskompetencen bl.a. ved at bestå i, at eleverne kan følge og udforme en kæde af argumenter. Hvilket kan tolkes som, at der netop er fokus på strukturerne imellem de forskellige argumenter, hvordan de hænger sammen og hvilke mulige slutninger det giver anledning til. Det kan fremføres som, at de uddrag af originalkilder, der benyttes i afprøvningerne, består af forskellige enkelte objekter, der præsenteres som et samlet mønster, kæder af argumenter. I sætning 6, bog IV i *Euklids Elementer*: *I en given cirkel at indskrive et kvadrat*, udgør disse et bevis. Mens der i Platons *Menon* i højere grad fokuseres på argumenterne, at få disse ekspliciteret undervejs i opbygningen af ræsonnementerne, som også samlet i kraft af deres opbygning kan ses som et bevis. I begge tilfælde bliver der præsenteret en struktur, en opbygning, hvor forskellige objekter sættes i relation til hinanden. Disse kan muligvis følges, hvis de ses som en række af enkelte objekter med tilhørende regler, der sættes sammen. Ud fra Mellin-Olsens (1984) beskrivelse, synes de først at kunne forstås, hvis der er en forståelse for, hvordan de er sat sammen, altså relationerne, strukturerne herimellem. I tilfældet med Euklids sætning 6, bog IV, er der altså tale om at få en forståelse for at kunne følge opbygningen af beviset i forhold til at se sammenhængen mellem cirklen og den indskrevne kvadrat. Her kan arbejdet med at bruge samspillet mellem originalkilder og GeoGebra også ses som en måde at udforske forskellige former for ideer. De ideer læsningen af originalkilden giver anledning til og de ideer arbejdet med GeoGebra giver anledning til. Her må man igen holde sig for øje, at euklidisk geometri er indbygget i GeoGebras funktioner.

Distinktionerne mellem regel- og strukturopfattelse er medtaget her for at nuancere og udvide blikket på Misfeldt og Jankvists (2018) beskrivelse af de tre former for medieringer. Mellin-Olsens (1984) distinktioner gør det også muligt, dels at fokusere på, om der hovedsageligt synes at være en regel- eller strukturopfattelse på spil, og dels at fokusere på at indsnævre og udvide de matematiske strukturer forskellige argumenter, ræsonnementer og beviser bygger på. Det gælder både i forhold til at aktivere den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen undervejs i arbejdet med GeoGebra.

### 3.4. Forskellige kombinationsmuligheder

De fire teoretiske distinktioner adskiller sig fra hinanden og bruges alle i denne afhandling med forskelligt fokus for øje:

- Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002) samt Mellin-Olsens (1984) begreber regel- og strukturopfattelse er distinktioner, der knytter sig til elevernes matematiske forståelse, beherskelse og handlerum, når de arbejder med at løse opgaver og formulere matematiske argumentationer, ræsonnementer og beviser.

- Misfeldt og Jankvists (2018) medieringer er særligt knyttet til de medieringsmuligheder elevernes samt elevernes og lærerens arbejde med GeoGebra lægger op til. Deres arbejde med originalkilder spiller også ind herpå.
- Mellin-Olsens (1984) begreber dynamisk og statisk læsning knytter sig til elevernes gøren og laden, mens de læser hhv. originalkilder og GeoGebra.

De fire distinktioner opfattes ikke og bruges ikke som samlet ramme i hverken planlægning eller analyser i afhandlingen. De ses som fire selvstændige distinktioner, der kan kobles på forskellig vis.

# 4. Design Based Research

I dette kapitel præsenteres Design Based Research (DBR), som danner den metodologiske ramme om ph.d.-projektet. Forståelsen af DBR som en metodologisk ramme er inspireret af Bakker (2019), som bl.a. skriver:

> Design research is an approach in the sense that it can be compared with action research or experiment. However, it is also more general than particular strategies such as survey, case study, or experiment in the sense that within design research these strategies can be used. This is the reason that some experts prefer to call design research a methodological framework rather than a strategy. It is a genre of flexibly using existing research approaches for the purpose of gaining design based insights and research-based designs. (Bakker, 2019, s. 7)

Bakkers (2019) beskrivelse af at bruge eksisterende forskningstilgange fleksibelt med det formål at opnå designbaseret indsigt og forskningsbaserede design falder i tråd med, at målet med ph.d.-projektet er at udvikle didaktiske principper på baggrund af den løbende vekselvirkning mellem designbaseret indsigt og forskningsbaserede design, der har været rammen om arbejdet med de 3 forskellige afprøvninger.

Kapitlet indledes med en beskrivelse af forskellige tilgange til og betegnelser for designstudier, hvorefter valget af betegnelsen DBR begrundes. Derefter fokuseres der på formål, forholdet mellem teori og praksis, funktioner og karaktertræk, faserne i et klasserumsdesignstudie og det hypotetiske læringsspor. Disse fokusområder beskrives i hver deres afsnit, som indledes med en mere overordnet beskrivelse af fokusområdet på baggrund af udvalgte tekster. Hvert afsnit afsluttes med en beskrivelse af, hvordan de forskellige fokusområder udspiller sig i forhold til nærværende ph.d.-afhandling. Kapitlet afsluttes med en beskrivelse af dataindsamlingsmetoder i ph.d.-projektet.

## 4.1. De mange betegnelser og varierende indhold

Studier, der baserer sig på design af forskellig karakter, har mange betegnelser inden for uddannelsesmæssig forskning. Formålet med dette afsnit er at give et kort indblik i nogle ligheder og forskelle mellem betegnelserne og indholdet heraf og på den baggrund argumentere for, hvordan der i resten af kapitlet navigeres i forhold til brug af de forskellige betegnelser, samt hvorfor DBR er den endelige betegnelse, der bruges i ph.d.-projektet. Cobb et al. (2017) fremhæver nogle af de forskellige betegnelser, der bliver brugt:

> Design studies have been given various names, including design experiments (Brown, 1992; Collins, 1992; Edelson, 2002), design-based research (Design-Based Research Collaborative, 2003), educational design research (van den Akker, Gravemeijer, McKenney, & Nieveen, 2006), and developmental research (Gravemeijer, 1994). (s. 208)

Endvidere pointerer Cobb et al. (2017) med reference til Bakker og van Eerde (2015), at denne mangfoldighed af betegnelser hovedsageligt har en historisk begrundelse og afspejler forskellige metodologier i de lande, hvori betegnelsen til design studies er oprundet. Ifølge Cobb et al. (2017) knytter navnet "developmental research" sig til forskning, hvor metodikken fremkom i sammenhæng med udvikling og forbedring af læseplansmaterialer. Barab og Squire (2004) refererer bl.a. til Collins (1992) og Brown (1992), som begyndte at tale om "design experiments", hvor man sammenlignede behandlings- og kontrolgrupper, som et slags modsvar til laboratoriebaserede undersøgelser inden for den kognitive psykologi, fordi de mente, at mange af de spørgsmål, de fandt vigtige, ikke kunne adresseres og besvares tilstrækkeligt herigennem. Ifølge Cobb et al. (2017) opstod "Design research" ligeledes, fordi andre forskere inden for den kognitive psykologi ville overkomme det, at der skulle indgå en behandlings- og kontrolgruppe, som lå i metoden "design experiments". Cobb et al. (2017) vælger at bruge betegnelsen "design studies" med den begrundelse, at de gerne vil undgå at blive slået i hartkorn med forskning, der involverer eksperimentelle sammenligninger af to eller flere grupper. En lignende argumentation bruger Design-Based Research Collective (2003), som skriver:

> We use the phrase *design-based research methods* deliberately (after Hoadley, 2002) to avoid invoking mistaken identification with experimental design, with studies of designers, or with trial teaching methods. (s. 5)

Design-Based Research Collective er en gruppe af fakulteter og forskere, som arbejder med at undersøge og forbedre praksisdesignbaseret forskning i uddannelse. Bakker og van Eerdes (2015) bruger også betegnelsen DBR og fremhæver, at en nøglekarakteristik herved er, at de uddannelsesmæssige ideer for både studerende og undervisere er formuleret i designet, men kan justeres undervejs i den empiriske testning, fx hvis de ikke virker, som antaget. De gør yderligere opmærksom på, at herved adskiller DBR sig fra andre interventionsforsknings-tilgange, da disse som oftest adskiller design og testning. Selvom Bakker og van Eerdes (2015) bruger betegnelsen DBR, foretrækker Bakker (2018), som antydet i starten af nærværende kapitel, betegnelsen Design Research.

I nærværende ph.d.-afhandling er betegnelsen DBR den gennemgående. I forhold til de ovenstående beskrivelser undgås ordet eksperiment og dermed også risikoen for at signalere, at studiet involverer eksperimentelle sammenligninger af grupper. Dertil kommer, at jeg finder termen DBR mest passende og dækkende for mit projekt, fordi ordet "based" indikerer, at der lægges stor vægt på designdelen, men ikke som en altoverskyggende faktor. Forskningen er "baseret" på designet, men ikke kun direkte influeret heraf. Undervejs i mit projekt har jeg i perioder arbejdet med et hovedfokus på, hvordan jeg kunne få teoridelen til at hænge sammen. Dette var på sin vis forankret i arbejdet med et design, men ikke alene. Hvis jeg havde valgt at bruge betegnelsen "design studies", havde jeg i højere grad valgt en position, hvor jeg anså dette teoriarbejde som et middel til at nå målet. Andre gange har jeg haft et absolut hovedfokus på at være nysgerrig på praksis, fordi det også i sig selv var interessant og lærerigt. Der er vigtige dele af praksis, som ikke bliver en del af designet, bl.a. fordi de er for komplekse og ikke lader sig indfange af eller forme af bestemte praksisdesigns, ej heller teorier. På den baggrund anser jeg betegnelsen DBR for at være den bredeste betegnelse af dem, der er præsenteret i dette afsnit.

## 4.2. Formålet med DBR

I de udvalgte tekster, der danner grundlag for dette kapitel, er der en bred enighed om, at en endog særdeles vigtig pointe ved at gennemføre DBR er potentialet ved det metodologisk indlejrede spændingsfelt mellem teori og praksis. Barab og Squire (2004) fremhæver, at DBR har til hensigt at producere nye teorier, artefakter og praksisser, der kan bruges af og påvirke undervisning og læring i naturlige omgivelser. De skriver, at deres overordnede mål med at bruge DBR er:

> Our goal, as applied researchers engaged in doing design work, is to directly impact practice while advancing theory that will be of use to others. (Barab & Squire, 2004, s. 8).

Derudover anser Barab og Squire (2004) det også, som værende et mål, at forskere, der arbejder med DBR åbent fremlægger og problematiserer deres design og resultater. Herigennem tages der højde for og gives indsigt i lokale dynamikker samt det komplekse ved både at være designer og forsker i et og samme projekt. Med reference til Cobb et al. (1999) pointerer Barab og Squire (2004), at forskeren netop ikke skal adskilles fra praksiskonteksten, men griber ind ved hjælp af interventioner, afprøvninger, som understøtter mulighederne for at undersøge teoretiske spørgsmål og udforske læring. Om forholdet mellem konteksten og de udviklede teoriers robusthed samt balancen mellem forfinelse og tilpasning, skriver de bl.a.:

> The goal is not to “sterilize” naturalistic contexts from all confounding variables so the generated theory is more valid and reliable. Instead, the challenge is to develop flexibly adaptive theories that remain useful when applied to new local contexts. (Barab & Squire, 2004, s. 11)

Ifølge Barab og Squire (2004) er synlighed omkring kompleksitet, den lokale kontekst, de variable, der har været i spil i det givne DBR-projekt m.m. medvirkende til, at man kan teste og udvikle teorier, der er smidige nok til at opretholde deres robusthed også hvis situationelle variabler ændres.

Som nævnt i de indledende afsnit af nærværende ph.d.-afhandling findes der ikke meget forskning omkring at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på mellemtrinnet. Der findes heller ikke meget forskning specifikt omkring at arbejde med dette samspil set ud fra et bredere matematikuddannelsesperspektiv med henblik på at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence samt historiske bevidsthed. På trods heraf har jeg som beskrevet i kapitel 2 “Review” og kapitel 3 “Teori” udvalgt 4 teoretiske distinktioner og nogle didaktiske opmærksomhedspunkter, som bruges senere i hhv. design, udarbejdelse og analyse af afprøvningerne. Lige såvel som de teoretiske distinktioner også bringes i spil i analysen af lærebogssystemet. Formålet med ph.d.-projektet er på baggrund af disse afprøvninger og analyser at give både et teoretisk bidrag og et mere praksisrettet bidrag. Det teoretiske bidrag kan netop ses som en avancering af brugen af de 4 forskellige teoretiske distinktioner (jf. afsnit 3.3. “De fire teoretiske distinktioner” og afsnit 3.4. “Forskellige kombinationsmuligheder”). Avanceringen består i, at teorierne på baggrund af analyserne kombineres på en måde, som kan synes hensigtsmæssige, hvis der fremadrettet skal arbejdes med at kvalificere arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Ligesom den historiske bevidsthed også sættes i spil i forhold hertil. Dertil kommer det mere praksisrettede bidrag, der består i, at der på baggrund af udviklingen af en hensigtsmæssig teorisammensætning formuleres mål for undervisningen, der knytter sig til de forskellige teoretiske distinktioner samt spørgsmål til lærere eller lærerteams, som vil give sig i kast med at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra (jf. afsnit 7.4.2. og 7.4.3.). De to forskellige former for bidrag hænger altså sammen og defineres i ph.d.-projektet som didaktiske principper. Principperne er udformet på baggrund af de 3 afprøvninger, en på hhv. 5., 6. og 7. klassetrin. På 6. og 7. klassetrin arbejdes der med samme originalkilde: Euklids fem første forudsætninger i bog I samt sætning 6, bog IV, mens der på 5. klassetrin arbejdes med et uddrag af Platons Menon. Selvom det var samme originalkilder, der blev arbejdet med i de to af afprøvningerne, var der alligevel variation i opgaverne, der var tilknyttet hertil. Ligesom orkestreringen af arbejdsformerne byggede på nogle af de samme ting i alle tre afprøvninger, men også varierede på tværs heraf. Det betyder forskellige former for variation mellem de tre afprøvninger med hensyn til bl.a. forskellige klassetrin, brug af kilder, opgaver og arbejdsformer. De didaktiske principper, der er kommet ud af arbejdet med DBR i ph.d.-afhandlingen, er i første omgang rettet mod mellemtrinnet, men det vurderes også, at de kan have en robusthed, der gør, de kan bruges på andre uddannelsestrin. Lige såvel som de måske også kan udvikles yderligere i forhold til at arbejde med andre matematikholdige tekster, såsom tekster, der præsenteres i lærebogssystemer eller brug af originalkilder og andre digitale teknologier, der ikke knytter sig til originalkilder med geometrisk indhold samt dynamiske geometriprogrammer. Dette udfoldes yderligere i kapitel 7 “Diskussion” og kapitel 9 “Perspektivering”.

## 4.3. Forholdet mellem teori og praksis – praksis og teori

For at skærpe blikket på brugen af de fire teoretiske distinktioner (jf. kapitel 3) og begrebet historisk bevidsthed i ph.d.-projektet sættes disse i relation til hhv. diSessa og Cobbs (2004) beskrivelse af teorityper og de fem typer teorier, Bakker og van Eerde (2015) præsenterer i forbindelse med DBR. Først præsenteres min læsning af teoribrugen i de to tekster. Efterfølgende argumenteres der for, hvor Bakker og van Eerdes (2015) præsentation af teorier synes at adskille sig fra diSessa og Cobbs (2004). Afslutningsvist sættes de fire teoretiske distinktioner og begrebet historisk bevidsthed, der blev udfoldet i kapitel 3, i relation til diSessa og Cobbs (2004) fire teorityper samt der gives en beskrivelse af, hvordan begreberne “ontologisk innovation” og “hypotetisk læringsspor” bruges i denne ph.d.-afhandling.

### 4.3.1. diSessa og Cobbs (2004) første fire teorityper

diSessa og Cobb (2004) skelner mellem fire typer af teorier ift. den grad, de relaterer til den konkrete kontekst. Den neden for beskrivende tekst er en forkortelse af pointerne fra diSessa og Cobbs (2004, s. 80-83) beskrivelse af de fire typer af teorier:

- Grand theories – de store teorier, de store pædagogiske teorier omhandlende kognition eller sociale processer, er på linje med “evolutionsteorien” eller “Newtons mekaniske love”. De inkluderer fx Piagets teori om intellektuel udvikling, Skinners behavioristiske teori om læring eller Newells forenede teorier om kognition. Vanskelighederne ved de store teorier er, at de enten er for ufærdige, upræcise eller er på et så generelt niveau, at de er svære at omsætte til og implementere i sikre designprocesser. Fx er Piagets teori stærk og en fortsat vigtig kilde til indsigt, men i uddannelsesmæssige sammenhænge er forsøg på at anvende hans ideer ofte resulteret i en uberettiget generalisering af fokuserede empiriske resultater. Piagets teori er i sig selv utilstrækkelig til at informere design og den er heller ikke udviklet til det formål.

- Orienting frameworks – de orienterende teoretiske rammer kan fx være konstruktivistisk teori eller kulturel historisk teori og bruges som oftest som basis for instruktionsdesign. De orienterende teoretiske rammer kan sandsynligvis bedst ses som metateorier, der kan medvirke til at give nogle mere generelle perspektiver på en konceptualisering af forskellige emner inden for læring, undervisning og instruktionsdesign. De kan skabe nogle overordnede teoretiske forståelsesrammer for de implicerede parter i et designstudie, men de kan sjældent stå alene, når det kommer til at træffe mere specifikke virkeligheds- og kontekstnære designbeslutninger.
- Frameworks for action – rammer for handling. Disse rammer kan siges at være pædagogiske strategier, man på forhånd vælger mere eller mindre at læne sig op ad. Rammerne for handling giver fokus og retning til design af læringsmiljøer, men kan imidlertid ikke i sig selv tjene teoriens rolle, da de ikke rent adskiller deres videnskabelige påstande og valideringer fra de foreslåede handlinger. Det betyder, at teorien eller teorierne bag handlingsrammerne er relativt komplekse. De spænder ofte over forskellige elementer, der ikke nødvendigvis kan samles under én paraply. I forbindelse med handlingsrammerne pointerer diSessa og Cobb, at deres ærinde ikke er at nedvurdere dem. De spiller en kritisk rolle i tilrettelæggelsen af forskning om undervisning i lyset af den aktuelle state of the art inden for et givent område. Deres formål er dog mere praktisk orienteret end de er forbundet med videnskabelige kerneværdier, såsom præcision, udtømmende og eksplicitte formuleringer, og falsifikation.
- Domain Specific Instructional Theories – domænespecifikke undervisningsteorier. Det er ofte denne type teorier, der refereres til, når man taler om designeksperimenter. Teorier af denne type konstituerer rationalet for det pædagogiske design. De indebærer en konceptuel analyse i forbindelse hermed. I modsætning til handlingsrammerne har denne type teorier

mere end en heuristisk værdi og de er udtryk for testbare formodninger i forhold til lærings-processerne og midlerne til at konstruere dem. Derudover afspejler de det detaljerede arbejde i forhold til formulering, testning og revidering af et hypotetisk læringsspor, selvom de typisk er udviklet inden for en orienterende ramme. Domæne specifikke undervis-ningsteorier kan anses for at udgøre begrundelsen for pædagogisk design. Generaliseringer på tværs af sådanne teorier afprøvet i praksis kan resultere i udviklingen af handlings-rammeteorier, såsom Realistic Mathematics Education. Igen pointerer diSessa og Cobb, at det ikke er for at nedvurdere værdien af denne type teorier, særligt fordi udviklingen af denne type teorier er en af grundene til, at vi gennemfører designstudier. De ønsker at fremhæve, at designstudier ikke vil være særlig progressive på lang sigt, hvis motivationen for at gennemføre dem begrænser sig til at producere domænespecifikke undervis-ningsteorier.

De fire typer af teorier diSessa og Cobb (2004) beskriver kan inddeles i forhold til deres vægtning af teori og af praksis. Hovedvægten og udgangspunktet for de store teorier og de orienterende teoretiske rammer er selve teorierne, som derfra kan kobles til et praktisk design. Mens hovedvægtningen og tilknytningen for teorityperne: handlingsrammer og domæne-specifikke undervisningsteorier er i forhold til praksis. For at bevare tyngden og den progressive side af designforskning, skal man være varsom med at lade de to sidste typer af teorier stå alene og være mål i sig selv for designforskningsforløb. Derved synes det som, at diSessa og Cobb (2004) plæderer for de mere teoritunge designforskningsforløb.

Bakker og van Eerde (2015) fremhæver, at teori typisk spiller en mere central rolle i DBR end i aktionsforskning og refererer til diSessa og Cobbs (2004) inddeling af teorier og skriver, at diSessa og Cobb (2004) opererer med 5 forskellige typer. De fire ovenstående plus:

> Hypothetical Learning Trajectories (Simon 1995) or didactical scenarios (Lijnse 1995; Lijnse and Klaassen 2004) formulated for specific teaching experiments (explained in Sect. 16.1.3). (Bakker & van Eerde, 2015, s. 437)

Umiddelbart synes det ikke som diSessa og Cobb (2004) definerer den femte type teori, som værende det hypotetiske læringsspor. I gengivelsen af diSessa og Cobbs (2004) fire første typer af teorier, omtales det hypotetiske læringsspor under teoritypen "domænespecifikke undervisningsteorier". Det synes som, at diSessa og Cobb (2004) lægger op til, at domænes-pecifikke undervisningsteorier oftest udvikles inden for rammerne af de orienterende teoretiske rammer, men understøtter en formulering, testning og revidering af et hypotetisk læringsspor. Det kan tolkes som, at diSessa og Cobb (2004) ikke anser det hypotetiske læringsspor for at udgøre en teori i sig selv. Uanset om det hypotetiske læringsspor anses for at være en særegen type teori eller som værende en del af de domænespecifikke undervisningsteorier, kan det tolkes som, at begge hold forfattere anser det hypotetiske læringsspor, som værende udspændt mellem teori og praksis og netop være omdrejningspunktet for kontinuerligt at koble de to felter undervejs i de forskellige iterationer, som DBR består af.

### 4.3.2. Ontologisk innovation og det hypotetiske læringsspor

Umiddelbart synes begrebet "ontological innovation", ontologisk innovation, at spille en særlig rolle for diSessa og Cobb (2004). Herom skriver de bl.a:

> Beyond narrowing our consideration by contrasting the cases of grand theory, orienting frameworks, frameworks for action, and domain specific instructional theories, can we be more affirmative in characterizing a type of theory that can be important for design work? Of course, a huge amount could and should be said, here we concentrate on one important element, ontological innovation. (diSessa & Cobb, 2004, s. 84)

diSessa og Cobb (2004) omtaler altså de fire ovenfor beskrevne typer af teorier og så ontologisk innovation. De beskriver bl.a. ontologisk innovation således:

> The idea behind ontological innovation is deceptively simple. Science needs its set of terms or categories to pursue its work. Again, this has always been true of developed sciences: "force," "gene", "natural selection," "molecule" "element," "catalyst." The process of creating such categories, however, is far more complicated than writing down a definition, or finding a relevant meaning in a dictionary. Instead, defining the technical terms of science is more like finding and validating a new category of existence in the world; hence we use the term ontological innovation. (diSessa & Cobb, 2004, s. 84)

Ud fra denne beskrivelse er det at finde og validere nye kategorier af det, som eksisterer i verden, altså i deres tilfælde inden for uddannelsesverdenen, et vigtigt mål med at bedrive DBR og på den måde være med til at udvikle det matematikdidaktiske uddannelsesfelt. Som illustration for ontologisk innovation beskriver de bl.a. forskerteamets Cobb, Yackel og Woods designeksperimenter, som begyndte i 1986. I begyndelsen fokuserede de på elevers matematiske læring primært ud fra et kognitivt perspektiv og endte med at finde, kategorisere og definere det, de kalder sociomathematical norms. Bakker og van Eerde (2015) beskriver det hypotetiske læringsspor, som værende en forlængelse af Freuthenthals tankeeksperimenter. De synes i højere grad at lægge vægt på, at man inden for DBR kan være med til at skabe en ny virkelighed inden for det matematikdidaktiske område, forløbet kredser om. På denne baggrund benyttes begge begreber i dette ph.d.-projekt. Det hypotetiske læringsspor ses ikke som en teori, men bruges som en tilgang til bevidst at arbejde med spændingsfeltet mellem teori og praksis i forbindelse med den overordnede planlægning og analyse af de enkelte afprøvninger. Der vendes tilbage til det hypotetiske læringsspor i afsnit 4.6. Først vendes blikket mod, hvordan der i nærværende ph.d.-projekt arbejdes med diSessa og Cobbs 4 teorityper og ontologisk innovation.

### 4.3.3. Ph.d.-projektets brug af teorier i forhold til diSessa og Cobbs (2004) teorityper

Formålet med at bruge DBR som metodologisk ramme i ph.d.-projektet er, som beskrevet i de foregående afsnit, ikke at skabe en ny teori, men at skabe en teoretisk konstruktion, der består af en særlig sammensætning af de fire udvalgte teoretiske distinktioner og begrebet historisk bevidsthed. Således at denne kan bruges til at kvalificere praksis.

diSessa og Cobb (2004) pointerer, at praksisteorierne ikke i længden kan stå alene og ikke i sig selv kan betragtes som teorier, men snarere som nye distinktioner. Umiddelbart synes det som om, diSessa og Cobb (2004) mener, at ingen af de fire teorityper, de karakteriserer, kan stå alene, når det gælder design studies:

> (…) we identify several types of theory that can be of value conducting design studies. However, we argue that, by themselves, they constitute an inadequate theoretical basis for design research in the long term (diSessa & Cobb, 2004, s. 80)

diSessa og Cobb (2004) slår altså fast, at de mener, teorierne i dem selv på lang sigt vil udgøre et utilstrækkeligt teoretisk fundament for design studies. Det kan tolkes som, at diSessa og Cobb (2004) mener, der må være en sammenhæng mellem de forskellige teorityper, når der arbejdes med spændingsfeltet mellem teori og praksis i DBR. Det kan også tolkes som et argument for, at ontologisk innovation er nødvendigt i forhold til udvikling af teorier i DBR. Og en tredje, måske lidt vidtgående, tolkningsmulighed er, at der under den ontologiske innovation kun kan udvikles teorier, der er robuste nok til ikke kun at gælde den lokale kontekst eller et meget specifikt område inden for én uddannelsesmæssige sammenhæng, hvis der i arbejdet med ontologisk innovation også skabes sammenhæng til de bagvedlæggende fire andre typer af teorier. I nærværende afhandling ligger den tredje tolkning til grund for måden, der arbejdes med diSessa og Cobbs (2004) betegnelse ontologisk innovation. Derfor gives der i dette afsnit et overblik over, hvordan ph.d.-projektets fire udvalgte teoretiske distinktioner og betegnelsen historisk bevidsthed, hver især kan knyttes til diSessa og Cobbs fire teorityper. De fire teoretiske distinktioner, der arbejdes med i denne afhandling er (jf. kapitel 3):

- Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002)
- Epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018)
- Dynamisk og statisk læsning (Mellin-Olsen, 1984)
- Regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984)

Dertil kommer, at der også arbejdes med at give eleverne mulighed for at udvikle det Jensen (2011) kalder historisk bevidsthed, som et middel til at øge elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med digitale teknologier. Hver af disse teoretiske distinktioner bygger på forskellige teoretiske fundamenter. I det følgende beskrives de forskellige teoretiske distinktioners overordnede teoritilknytning, som yderligere sættes i relation til diSessa og Cobbs fire teorityper. De præsenteres samlet i figur 4. I det nedenstående præsenteres et omfattende teoriapparat, som det ikke er muligt inden for denne ph.d.-afhandlings rammer at gå i dybden med. Derfor beskrives relationerne mellem teorierne, de teoretiske rammer og distinktionerne her i dette afsnit, mens der i de efterfølgende afsnit ikke refereres tilbage hertil- Her bringers de fire teoretiske distinktioner samt begreb historisk bevidsthed i spil som designmæssige og analytiske distinktioner.

Kompetencebeskrivelserne i KOM-rapporten kan karakteriseres som en kognitiv tilgang til at mestre matematik (Niss & Højgaard, 2019). Som det fremgår af kapitel 3 i nærværende ph.d.-afhandling, er det muligt at tolke KOM-rapporten, som en teoretisk ramme for matematik-læring- og undervisning. Ræsonnementskompetencen kan ses som en del af den overordnede teoretiske ramme, men når der er særligt fokus på at skabe muligheder for, at eleverne kan udvikle denne specifikke matematiske kompetence, synes ræsonnementskompetencen i højere grad at være rettet mod handling i praksis. På den baggrund placeres KOM-rapporten under diSessa og Cobbs (2004) betegnelse "de orienterende teoretiske rammer", mens den under-søgende og produktive side af ræsonnementskompetencen placeres under "rammer for handling".

Misfeldts og Jankvists (2018) beskrivelse af de 3 typer af medieringer: Epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering. De synes bl.a. at bygge på Trouches (2005) udlægning af instrumentel genese, som bl.a. bygger på Rabardel (1995); Vérillon og Rabardel (1995) beskrivelse af mediering samt Vergnauds brug af skemaer i Vergnauds "Theory of conceptual fields". Begge dele kan ledes tilbage til både Piaget og Vygotsky. Dertil kommer, at de tre typer af medieringer også baseres på bl.a. Hannas (1989) distinktion mellem beviser, der forklarer og beviser der beviser samt Harel og Sowders (2007) teori om overbevisningsskemaer. Ovenstående medvirker til, at de tre typer medieringer særligt er rettet mod, hvordan digitale teknologier understøtter menneskers udvikling af matematiske ræsonnementer. Derfor placeres de tre former for medieringer under diSessa og Cobbs (2004) betegnelse ”domæne specifikke undervisningsteorier”. I denne sammenhæng bruges Trouches (2005) udlægning af instrumentel genese, hvor mediering (Rabardel, 1995; Vérillon & Rabardel, 1995) er et vigtigt begreb, Hannas (1990) beskrivelse af beviser, der forklarer samt Harel og Sowders (2007) beskrivelser af overbevisningsskemaer, som “rammer for handling” – rammer for at bruge de tre former for mediering i forhold til både planlægning og analyse af praksis. Vegnauds “Theory of conceptual fields” ses i den forbindelse som en overordnet teoretisk forståelsesramme og placeres derfor under “de orienterende teoretiske rammer”. Vergnauds teori bygger endividere på både Piagets teori om skemaer og Vygotskys socialkonstruktivistiske læringsteori, som begge synes at kunne tolkes som at ligge inden for det, diSessa og Cobb beskriver som “de store teorier”. Derudover er Misfeldt og Jankvist (2018) også inspireret af Artigues beskrivelse af epistemisk og pragmatisk værdi.

Mellin-Olsen (1984) refererer også til både Piaget og Vygotsky og pointerer, at Piaget ville have brugt begreberne figurativ kundskab (om statisk kundskab) og operationel kundskab (om dynamisk kundskab). Han påpeger ligeledes, at der er forskel i en sådan forståelse og så en forståelse inden for en Vygotskys inspireret tradition. Inden for sidste nævnte tradition overskrides Piagets distinktioner, og det dynamiske betyder noget mere:

> Innenfor den tradisjonen vi referer til her, lingvistikken og Vygotskys språkrettete teori, betyr det “dynamiske” noe mer. Det er ikke bare den strukturelle forståelsen av kunnskapen. Det er med denne sidste faktoren, altså den betydningen eleven tillegger kunnskapen, at vi overskrider Piaget og skaper en sosial læringsteori. (Mellin-Olsen, 1984, s. 88)

I forhold til den dynamiske læsning, sprogets og dermed tegnets fortolkningsmuligheder i menneskets interaktion hermed, kan det fremhæves, at Mellin-Olsen (1984) hovedsageligt bygger på Vygotskys læringsteori. I nærværende ph.d.-projekt bruges distinktionen mellem dynamisk og statisk læsning til at planlægge og analysere forskellige episoder i forbindelse med elevers arbejde med læsning af hhv. originalkilder og GeoGebra samt samspillet herimellem. Distinktionen mellem de to typer læsninger kan siges at udgøre en del af rationalet bag det pædagogiske design. På den baggrund vurderes denne distinktion at høre under “domæne specifikke undervisningsteorier”.

Mellin-Olsen (1984) synes på samme måde hovedsageligt at læne sig op ad Vygotsky, når det kommer til distinktionen mellem regel- og strukturopfattelse. Når denne distinktion ses som et spændingsfelt mellem hhv. en regel- og en strukturopfattelse, synes et sådant blik både på matematikfaget og på forskellige matematiske emner at udgøre et mere generelt perspektiv på forskellige emner inden for læring, hvorfor denne distinktion placeres under teoritypen "de orienterende teoretiske rammer".

Den samme begrundelse synes også at gøre sig gældende for Jensens (2011) beskrivelse af historisk bevidsthed. Derfor placeres denne også under "de orienterende teoretiske rammer" i figur 4. Der er indført pile i figuren, fordi nogle af teorierne og distinktionerne var svære at placere, bl.a. fordi de måske også kan tolkes som at ligge inden for diSessa og Cobbs (2004) definition af de forskellige typer teorier lige ovenfor eller nedenfor i skemaet. Instrumentel genese (Trouche, 2005) og overbevisningsskemaer (Harel & Sowder, 2007) kunne fx også vurderes at høre under de "orienterende teoretiske rammer". Når de her er placeret under rammer for handling, er det vurderet ud fra deres position i sammenhæng med Misfeldt og Jankvists (2018) samt Jankvist og Misfeldts (2019) definitioner af de tre medieringsformer.

| | |
|---|---|
| Grand theories – de store teorier | Piagets teori om intellektuel udvikling og Vygotskys teori om læring igennem sociale processer. |
| Orienting frameworks – de orienterende teoretiske rammer | Vergnauds "Theory of conceptual fields", KOM-rapportens kompetence-beskrivelse (Niss & Jensen, 2002), regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984) samt historisk bevidsthed (Jensens, 2011). |
| Frameworks for action – rammer for handling | Trouches (2005) beskrivelse og definition af instrumentel genese, Hannas (1990) beskrivelse af beviser, der forklarer, Harel og Sowders (2007) beskrivelse af overbevisningsskemaer samt KOM-rapportens beskrivelse af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002). |
| Domain Specific Instructional Theories – domæne specifikke undervisningsteorier | Misfeldts og Jankvists (2018) skelnen mellem tre typer af mediering: Epistemisk mediering, pragmatisk mediering og retfærdiggørende mediering samt Mellin-Olsens (1984) distinktioner mellem henholdsvis en dynamisk og en statisk læsning |

*Figur 4: Skema – De fire teoretiske distinktioner og termen historisk bevidsthed i forhold til diSessa og Cobbs (2004) fire teorityper. Der indgår også nogle af de teorier og termer, de fire teoretiske distinktioner, hver især bygger på.*

Som nævnt i afslutningen af kapitel 3 "Teori" bruges disse fire teoretiske distinktioner og begrebet historisk bevidsthed i forskellige kombinationsmuligheder under både planlægning, gennemførelse og analyse af afprøvningerne. Det samme gælder for lærebogsanalysen. På baggrund af de tre afprøvninger og analyserne heraf sammenfattes brugen af kombinationer af de teoretiske distinktioner og historisk bevidsthed og danner grundlaget for ph.d.-afhandlingens teoretiske bidrag, som altså bygger på praksisudvikling. De udfoldes i hhv. afsnit 6.3. "Opsamling på teoretiske sammenhænge på tværs af case 1 og 2" samt afsnit 7.4.1. "Projektets teoretiske bidrag".

## 4.4. De fem funktioner og karaktertræk ved DBR

Ifølge Cobb et al. (2017), Bakker og van Eerde (2015) samt Design-Based Research Collective (2003) har DBR fem brede funktioner. Selvom disse funktioner bliver præsenteret i lidt forskellig rækkefølge og med en anelse varierende indhold i de tre tekster er hovedtrækkene de samme og kan præsenteres som:

1. Målet er at udvikle teori om læring og midler, der understøtter læring. Idealistisk set adresserer DBR de typer problemer, praktikere står med, når de forsøger at understøtte studerendes og underviseres læring eller øge skoler og distrikters kapacitet i forbindelse med undervisningsmæssig forbedring. Deres funktion er at bidrage direkte til at forbedre kvaliteten af studerendes eller elevers matematikundervisning samt/eller af læreres og underviseres professionelle udvikling.
2. DBR har en yderst interventionistisk karakter. DBR tager afsæt i praksis og sætter et afsæt på praksis.
3. DBR har fremadrettede og refleksive komponenter, som ikke behøver at blive adskilt af et undervisningseksperiment. De hypoteser omkring læring, der udvikles i forberedelsen i forbindelse med en afprøvning, konfronteres med den faktiske læring, der observeres under selve afprøvningen. Denne konfrontation danner baggrund for analyser og refleksioner, som kan danne baggrund for ændringer af den oprindelige plan for den næste undervisnings-lektion. DBR adskiller sig fra andre eksperimenterende tilgange ved, at man ikke kun formulerer hypoteser og refleksioner heromkring før og efter et undervisningseksperiment. Der sker også undervejs.
4. DBR har en cyklisk natur. Det involverer testning, evt. revision og helt at opgive antagelser for at understøtte udvikling. Ønsket om at forbedre udviklingsmuligheder fordrer iterative cykliske processer med design og analyser.
5. Teorien, som er under udvikling i et DBR-projekt, bliver nødt til at virke i virkeligheden. Bakker og van Eerde (2015) skærper dette yderligere i forhold til at beskrive kravet om generaliseringsmuligheder:

   > Yet it must be general enough to be applicable in different contexts such as classrooms in other schools in other countries. In such cases we can speak of transferability. (s. 438)

Den femte tværgående funktion er altså at sigte mod generalisering af de praksis- og teori-udviklinger, der har fundet sted i studiet.

Ovenstående beskrivelser af funktioner ved DBR bruges i nærværende ph.d.-projekt på følgende måde:

1. Målet er at udvikle didaktiske principper, hvor omdrejningspunktet er arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på en måde, som understøtter elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Målet er også at øge elevernes muligheder for at udvikle en historisk bevidsthed, som kan blive et middel til at understøtte deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med digitale teknologier. Principperne udvikles på baggrund af planlægning, gennemførelse og analyse af de tre afprøvninger. Det at arbejde med kombinationen af de fire teoretiske distinktioner og historisk bevidsthed er mig bekendt ikke brugt inden for eksisterende forskning i spændingsfeltet mellem matematikkens historie, herunder originalkilder, digitale teknologier og ræssonnementer. Ligesom jeg ikke er bevidst om, at de tilsammen tidligere skulle være brugt i forskellige kombinationer i andre forskningsprojekter inden for det matematikdidaktiske forskningsfelt. Derfor er et af målene med projektet også at skabe en teoretisk konstruktion, hvor de fire teoretiske distinktioner samt historisk bevidsthed indgår i et hensigtsmæssigt samspil, når det handler om at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnements-kompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Denne teoretiske konstruktion ses som den ontologiske innovation i nærværende ph.d.-projekt.
2. Studiet har en interventionistisk natur, bl.a. forstået på den måde, at det i de to af klasserne var helt nyt for både lærere og elever at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Mens der i den første afprøvning, afprøvning 0, var særlig gunstige vilkår, fx havde både elever og lærere prøvet at arbejde med samspillet mellem en af Euklids tekster og GeoGebra tidligere[15] og de var ca. en halv klassestørrelse. I afprøvning 0 kendte eleverne strukturerne i nogle af opgavetyperne, men der var også nye typer opgaver. De havde ikke tidligere arbejdet med Euklids forudsætninger, bog I, ej heller haft særligt fokus på ræsonnementskompetencen. Fælles for de tre afprøvninger er, at det interventionistiske består i:

- Det er udformet forløb til hver afprøvning, hvor det matematiske indhold ikke matcher det gængse matematiske indhold klasserne arbejder med.

[15] Det er analyseret i Olsen og Thomsen (2017), Olsen og Thomsen (2018) samt Thomsen og Olsen (2019).

- Forløbene har det formål at ændre på elevernes muligheder for at understøtte udviklingen af deres ræsonnementskompetence. Det betyder bl.a., at nogle af arbejdsformerne er nye for eleverne, fordi der hele tiden lægges vægt på, at de skal forklare, argumentere og ræsonnere – det gælder både mundtligt og skriftligt.

3. De hypoteser, der udvikles omkring læring for hver afprøvning, tager udgangspunkt i Fælles Mål samt i overordnede hypoteser omkring læring, som bl.a. kan spores tilbage til reviewet, til lærebogsanalysen og de fire teoretiske distinktioner samt termen historisk bevidsthed. De blev omsat til en mere overordnet plan for hver afprøvning, som løbende blev justeret undervejs i forløbende bl.a. med udgangspunkt i en analyse af det indsamlede data.
4. Studiet har en cyklisk natur i den forstand, at den ene afprøvning har indflydelse på planlægning og forfining af den efterfølgende, men rammerne har været forskellige i de tre afprøvninger. De foregår fx på 3 forskellige klassetrin hhv. 6., 5. og 7. (i nævnte rækkefølge) og de involverer 2 forskellige hovedkilder: 1) Euklids 5 første forudsætninger, bog I og Eudklids sætning 6, bog IV: *I en given cirkel at indskrive et kvadrat* (blev brugt i 6. og 7. klasse) og 2) Uddrag (s. 32 – 41) af Platons tekst om Menon (blev brugt i 5. klasse). Fælles for brugen af kilderne var, at illustrationerne i kilderne var udtaget af de tekster, eleverne arbejdede med. Samlet set kan afprøvningerne karakteriseres som et DBR-studie, hvori der kan skelnes mellem to slags iterationer: 1) De iterationer, som foregår på tværs af afprøvningerne, og 2) de iterationer som foregår imellem undervisningsgangene i de enkelte afprøvninger. For begge typer iterationer gælder det, at de både er rettet mod opgaver, måder at organisere undervisningen på samt indsamling af data. Et konkret eksempel herpå er, at det blev mere og mere klart undervejs i projektet, at lærerens rolle er helt afgørende i arbejdet med at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. I afprøvning 0 var kameraerne hovedsageligt rettet mod gruppearbejdet, mens lærerens dialoger med eleverne undervejs i deres gruppearbejde var i fokus i afprøvning 2. I afprøvning 0 brugte de ikke GeoGebra til at undersøge Euklids fem forudsætninger, bog I. Det gjorde de i afprøving 2. I afprøvning 1 synes det ofte svært for eleverne at arbejde skriftligt med deres matematiske argumentationer. Derfor blev der konsekvent arbejdet med screencast sideløbende med elevernes skriftlige arbejde i afprøvning 2. Det gennemgående cykliske iterative træk er rettetheden mod undersøgelsen af mulighederne for, at eleverne kan udvikle deres ræsonnementskompetence samt historiske bevidsthed, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

5. De didaktiske principper, der udvikles undervejs i dette projekt er udtryk for ny viden inden for spændingsfeltet mellem teori og praksis, når der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. De didaktiske principper uddifferentieres i et teoretisk spor og i et praksisspor, således at de forhåbentligt både kan inspirere forskere, forløbs- og opgavedesignere samt undervisere. Samspillet mellem de fire udvalgte teoretiske distinktioner og betegnelsen historisk bevidsthed udviklede sig undervejs til at danne nogle særlige mønstre, som bliver udgangspunktet for ph.d.-projektets teoretiske bidrag.

Reviewet og lærebogsanalysen er ikke ekspliciteret i nævneværdiggrad i formuleringen af disse fem funktioner og karaktertræk ved nærværende ph.d.-projekt. De skal snarere ses som en implicit del heraf og deres overordnede rolle har hovedsageligt været at inspirere til design af og justeringer undervejs i afprøvningerne samt efterfølgende at kunne diskutere disse (jf. kapitel 7 “Diskussion”).

## 4.5. Et klasserumsdesignstudie

Ifølge Cobb et al. (2017) er der flere forskellige typer designstudier. Heriblandt ét de kalder “Classroom design studies”, klasserumsdesignstudier. Klasserumsdesignstudier er karakteriseret ved, at forskerteamet samarbejder med én eller flere matematiklærere i forhold til at planlægge og have ansvaret for undervisningen samt i forhold til at undersøge processerne omkring elevernes læring inden for et bestemt matematisk domæne eller område. Cobb et al. (2017) beskriver, at klasserumsdesignstudier kan strække sig over et par uger til et helt, eller flere, skoleår. Fælles for de tre afprøvninger er, at jeg har samarbejdet med en lærer omkring hver enkelt afprøvning og afprøvningerne har enkeltvist strukket sig over nogle uger. Afprøvning 0 blev afviklet i slutningen af skoleåret 2018-2019, afprøvning 1 i forårssemesteret af skoleåret 2019-2020 og afprøvning 2 i første kvartal af skoleåret 2020-2021. Et klasserumsdesignstudie indeholder ifølge Cobb et al. (2017) følgende faser:

1. Til forberedelse af et klasserumsdesign hører udspecificering af mål for elevernes matematiske læring, dokumentering af instruktionsstartpointer, afgrænsning af et forestillet eller hypotetisk læringsspor samt at placere studiet i en teoretisk kontekst.
2. Når man eksperimenterer med at understøtte læring indgår dataindsamling samt iterative cykler af design og analyser.

3. I fasen med at udføre retrospektive analyser indgår det samlede sæt af indsamlet data og der skabes grundlag for det, de kalder argumenterende grammatik (argumentative grammar). Her handler det om at vise, at den udviklede praksis og teori er årsagen til evt. forbedringer. Ligesom der skal redegøres for, hvorfor disse resultater er generaliserbare. Derudover er det også vigtigt, at der i denne fase redegøres for studiets troværdighed.

I dette afsnit gives en meget overordnet beskrivelse af de tre faser, eftersom de udfoldes yderligere andre steder i afhandlingen. Den teoretiske kontekst ph.d.-projektet placeres i er bl.a. beskrevet i kapitel 3 og i afsnit 4.3. Ligesom denne teoretiske kontekst bringes i spil i analyserne i kapitel 5 og 6. Den resterende del af fase 1 udfoldes yderligere i afsnit 4.6. "De hypotetisk læringsspor", fase 2 udfoldes i afsnit 4.7. "Dataindsamling til hhv. lærebogsanalyse og afprøvninger" og selve de retrospektive analyser bliver udført i kapitel 6 "Retrospektiv analyse af afprøvninger" og diskuteres i kapitel 7.

En overordnet beskrivelse af de forskellige faser i hvert af forløbene er:

1. En indledende fase, forberedelses- og designfasen, hvor lærerne præsenteres for de overordnede ideer i projektet, mål, mulige kilder, brug af GeoGebra og en overordnet planlægning af forløbet i den enkelte klasse. På baggrund af mødet med lærerne blev nogle ideer beholdt, andre delelementer videreudviklet, mens andre igen blev forkastet. Det blev grundlaget for den overordnede ramme omkring det pågældende forløb.
2. De forskellige undervisningsgange og tiden imellem kan karakteriseres som den eksperimenterende fase, undervisningseksperimenterne. Her blev den overordnede planlægning løbende taget op til revision og udviklet på baggrund af den indsamlede data samt lærerens og mine umiddelbare oplevelser af elevernes engagement, arbejde og læring i klasserummet. Det foregik hovedsageligt imellem de forskellige undervisningsgange inden for hver af de tre afprøvninger. Ind imellem blev planerne også revideret en smule inden for en igangværende undervisningsgang.
3. Som nævnt ovenfor præsenteres den retrospektive analyse i kapitel 6 og diskuteres i kapitel 7. Målet hermed er bl.a. at vise, hvori den udviklede praksis og teori kan medvirke til at kvalificere mulighederne for at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence samt hvordan udvikling af historisk bevidsthed kan ses som et middel hertil, når de arbejder med samspillet med originalkilder og GeoGebra.

## 4.6. Det hypotetiske læringsspor

Bakker og van Eerde (2015) tillægger, som tidligere nævnt, det hypotetiske læringsspor essentiel værdi og pointerer, at DBR adskiller sig fra andre forskningsformer i måden hypotesedannelse foregår. Med henvisning til Freudenthal (1991) pointerer de, at design-forskere bruger deres forhåndsindsigt i praksis og teori til typisk at arbejde med at udføre tankeeksperimenter i forbindelse med, hvordan lærere og elever tænker og reagerer på forskernes design af empiriske lærings- og undervisningseksperimenter. Endvidere fremhæver de med henvisning til Plomp (2007), at produkterne i DBR også vurderes ud fra graden af innovation og brugbarhed. Det hypotetiske læringsspor er afgørende inden for hver af faserne. De anser den termonologi for at være en elaboration af Freudenthals tankeeksperimenter og henviser til Simon (1995) og skriver:

> The hypothetical learning trajectory is made up of three components: the learning goal that defines the direction, the learning activities, and the hypothetical learning process—a prediction of how the students' thinking and understanding will evolve in the context of the learning activities. (Bakker & van Eerde, 2015, s. 136)

Ifølge denne definition af et hypotetisk læringsspor lægges der altså vægt på 1) mål for læringen, som definerer retningen, 2) læringsaktiviteterne og 3) den hypotetiske læringsproces, hvor man prøver at forudsige, hvordan elevernes tænkning og forståelse vil udvikle sig i konteksten af læringsaktiviteterne.

Som beskrevet i reviewet i kapitel 2 udfoldede Bakker og Gravemeijer (2006) med henvisning til Freudenthals (1983) metode historisk fænomenologi, hvordan forskellige historiske kilder kan bruges i forhold at opstille hypoteser i forhold til at udforme hypotetiske læringsspor.

Som tidligere nævnt har den fælles overordnede målsætning for de tre afprøvninger i nærværende ph.d.-projekt været at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejdede med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Det har også været et mål at understøtte elevernes muligheder for at udvikle en historisk bevidsthed, som de kan bruge som middel til at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med digitale teknologier. De originalkilder, der er valgt i forbindelse med afprøvningerne, kan i høj grad karakteriseres som at fokusere på den rene matematik. Det skyldes bl.a., at det kan medvirke til at sikre, at selve matematikken og ræsonnementerne i den forbindelse bringes i fokus. Fælles for originalkilderne er også, at de er skrevet i et gammelt sprog, hvilket kræver et oversættelsesarbejde i afprøvningerne. Originalkilderne er valgt ud fra, at de havde et matematisk indhold, eleverne vurderes at kunne arbejde med på de pågældende klassetrin samt at GeoGebra kunne bruges forskellig vis i arbejdet med det matematiske indhold.

I Fælles Mål (2019) er tankegang og ræsonnement slået sammen til én matematisk kompetence. De forskellige design af undervisningsforløb og opgaver tager bl.a. udgangspunkt i koblingen mellem "ræsonnement og tankegang" samt det matematiske område "Geometri og måling", nærmere bestemt færdigheds- og vidensmålsoverskrifterne "Geometriske egenskaber og sammenhænge" samt "måling". Disse blev udmøntet mere konkret i forhold til de forskellige afprøvninger og de originalkilder, der dannede grundlag herfor.

I det følgende beskrives det hypotetiske læringsspor inden for hver af de tre afprøvninger. Alle tre afprøvninger har ovennævnte målsætning, derfor præsenteres den ikke i forbindelse med hver af afprøvningerne. Her præsenteres aktiviteterne undervejs i de enkelte forløb og til hver aktivitet beskrives en målsætning herfor, der indikerer den intenderede læring og udspringer af de fire udvalgte teoretiske distinktioner samt Jensens (2011) definition af historisk bevidsthed. De hypotetiske læringsspor for afprøvning 0 og 1 afsluttes med en opsamling på de overvejelser, der gav anledning til nye tiltag i de efterfølgende afprøvninger. Det betyder, at der her også gives en kort beskrivelse af, hvad der skete i de pågældende klasserum i forbindelse med enkelte aktiviteter, og hvorfor det gav anledning til ændringer i det hypotetiske læringsspor i de efterfølgende afprøvninger.

### 4.6.1. Afprøvning 0

Afprøvning 0 adskiller sig fra de øvrige afprøvninger bl.a. ved, at der kun deltog 13 elever samt at både elever og lærere tidligere havde arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Afprøvning 0 kan karakteriseres, som det Flyvbjerg (2015) kalder en kritisk case, eftersom betingelserne her var særlig gunstige[16]. Om den kritiske case skriver Flyvholm (2015) bl.a.:

> Valget af materialer gav mulighed for at formulere en generalisering, der er karakteristisk for kritiske cases, nemlig en generalisering af typen: "Hvis det har gyldighed i dette tilfælde, gælder det i alle (eller mange) tilfælde." I sin negative form ville generaliseringen lyde: "Hvis det ikke har gyldighed i dette tilfælde, gælder det i ingen (eller kun nogle få) tilfælde." (s. 508)

[16] En lignende karakteristik gives i Olsen og Thomsen (2017).

I forhold til det samlede ph.d.-projekt, vil det sige, at hvis designet af forskellige dele af undervisningsforløbet og opgaverne i den forbindelse ikke kan lade sig gennemføre i afprøvning 0, vil chancerne for, at de kan gennemføres i andre mellemtrinsklasser ikke være særlig sandsynlige. I forlængelse heraf er det også muligt at se, hvis nogle dele af forløbet synes at have uudviklede potentialer inden for rammerne af afprøvning 0, er det værd at prøve at skrue op for disse i de efterfølgende afprøvninger. På grund af de særlige forhold i afprøvning 0 ses den som en pilotafprøvning, der inspirerede designet af hhv. afprøvning 1 og 2. Derfor indgår afprøvning 0 heller ikke i den retrospektive analyse i kapitel 6.

Afprøvning 0 strækker sig over 6 lektioner, 1x2 lektioner samt 1x4 lektioner. De overordnede aktiviteter i afprøvningen er:

1. Klassen introduceres til forløbet og målet om at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Formålet hermed er at sætte scenen for eleverne og understøtte, at de bliver bevidste om, hvad der er formålet med forløbet.
2. Klassen arbejder i fællesskab med Euklids fem første forudsætninger ud fra en lærerstyret samtale og med illustrationer på tavlen i forbindelse med hver forudsætning. Formålet er at lægge op til, at eleverne får en forståelse for indholdet, for begreberne og deres rækkevidde i nogle af de forudsætninger, der ligger til grund for Euklids sætninger samt et indblik i hvad forudsætninger, aksiomer, er. Her er det tankegangskompetencen, der er i fokus.
3. Eleverne arbejder i makkerpar eller tremandsgrupper med Euklids sætning 6, bog I: Bog I og arbejdet med et uddrag af Euklids sætning 6, bog 4: *I en given Cirkel at indskrive et Kvadrat*. Teksten deles overordnet op i to dele, en konstruktionsdel og en bevisdel. Den indledende opgave til konstruktionsdelen lyder: "Brug GeoGebra til at tegne det, Euklid skriver i teksten". Og efter tekstbidden stilles spøgsmålet: "Hvad gjorde I jer af overvejelser undervejs?". Bevisdelen deles yderligere op i mindre bidder[17] og her er det overordnede spørgsmål til eleverne: "Prøv at beskriv med jeres egne ord, hvad det er Euklid skriver. Hvorfor gælder det?". Det formodes, at elevernes arbejde med denne opgave hovedsageligt understøtter, at GeoGebra udgør en pragmatisk mediering, Formålet hermed er, at eleverne understøttes i deres muligheder for at bruge og udvikle den undersøgende side af deres ræsonnementskompetence i forhold til at følge og forstå Euklids sætning og argumentationer undervejs. Derudover formodes det også at give dem mulighed for at indgå i en

[17] Denne opdeling af Euklids sætning i en konstruktions- og en bevisdel samt yderligere i mindre "bidder" er inspireret af Olsen & Thomsen (2017).

dynamisk læsning af teksten. Denne sætning er bl.a. valgt, fordi der heri er en sekvens, hvor Euklid i sin argumentation skriver: “Jeg siger saa, at den også er retvinklet. Thi da denne rette Linje BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en halvcirkel, altsaa er [vinkeltegn] BAD ret” (Eibe, 1997b, s. 73). Her kan eleverne afprøve påstanden i GeoGebra, som i den forbindelse kan udgøre enten en pragmatisk eller epistemisk mediering.

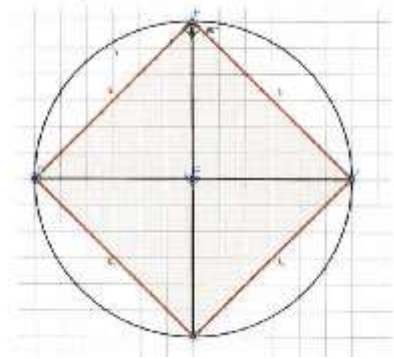
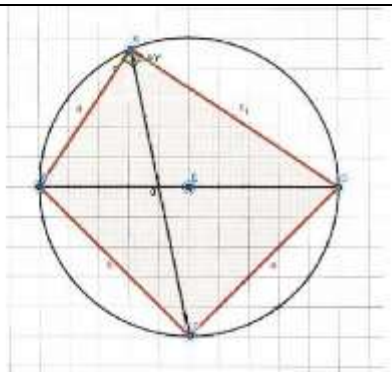
4. Eleverne får udleveret 2 sider med titlen til Euklids sætning 7: *Om en given Cirkel at omskrive et Kvadrat* (Eibe, 1997b, s. 74). På den ene side står der ud over titlen: “Konstruktion” og “Beskriv trin for trin, hvordan I kontruerer i GeoGebra”. På den anden side står der ud over titlen: “Jeres bevis” og “Formuler et bevis, som I mener er overbevisende”. Formålet er at understøtte eleverne i at bruge den produktive side af ræsonnementskompetencen med udgangspunkt i, at GeoGebra formentligt udgør en hhv. pragmatisk og epistemisk mediering undervejs i dette arbejde. Der laves stop undervejs, hvor makkerparrene eller grupperne præsenterer deres besvarelser for klassen og læreren. Læreren og klassekammeraterne stiller spørgsmål til makkerparrets eller gruppens præsentation. Målet hermed er, at eleverne understøttes i at udvikle både deres undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen ved at lytte, argumentere og stille spørgsmål. Samtidig er målet også, at eleverne kan få blik for, hvordan de bruger GeoGebra til at understøtte deres arbejde og på den baggrund understøtte, at deres arbejde med GeoGebra går mod at udgøre en epistemisk mediering. Eleverne skal arbejde med titlen på sætning 7, bog IV, fordi den ligger tæt op ad den foregående sætning, eleverne har arbejdet med. På den bagrund formodes det, at eleverne kan trække på deres arbejde hermed og understøtte en strukturopfattelse.

   Afslutningsvist svarer eleverne på følgende spørgsmål: “Hvordan er Euklids bevis opbygget? Hvorfor synes I, det er et bevis? Hvordan er jeres bevis opbygget – og hvorfor synes I, det er et bevis? Hvad synes I kendetegner et matematisk bevis?” Formålet er, at eleverne reflekterer over både Euklids bevisførelse og deres egen bevisførelse med udgangspunkt i deres arbejde med GeoGebra. På den baggrund også at understøtte deres muligheder for at udvikle en historisk bevidsthed omkring dem selv som matematiske aktører, der har et redskab som GeoGebra til rådighed og hvilke udfordringer og muligheder det giver i deres arbejde med matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser, hvilket yderligere formodes at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

De ting, der viste sig i afprøvning 0, som hovedsageligt blev udgangspunkt for nye tiltag i de efterfølgende afprøvninger var:

- Arbejdet med punkt 2, Euklids fem forudsætninger i bog I, blev på sin vis lidt for lærerstyret. Der syntes at være et potentiale i at lade eleverne arbejde selvstændigt med dem i GeoGebra før en fælles dialog i klassen omkring dem.
- Under arbejdet med punkt 3 opdagede eleverne, at der var en fejl i sætning 6, bog IV, i den udgave af *Euklids Elementer*, de arbejdede med, i forhold til navngivningen af et linjestykke i teksten til konstruktionsdelen. Her syntes at være et yderligere potentiale i at indikere det i opgaveteksten hertil.
- Ligeledes under arbejdet med punkt 3 i forhold til den del, der handlede om at blive overbevist om, at det var rigtigt, at vinkel BAD er ret i en halvcirkel, brugte eleverne hovedsageligt GeoGebra til at se at vinkel BAD forblev ret, når de trak i punktet A (se figur 5), samt at vinkelbenene i trekant BAD skal røre cirkelperiferien, hvis det skal gælde. Dertil kom, at elevernes arbejde i GeoGebra med at flytte punktet A langs cirkelperiferien gjorde, at de samtidig trak i diagonalen, som så ikke længere var diameter i cirklen. Det gav umiddelbart ikke eleverne mulighed for at se på trekanten i halvcirklen på billede 2 i figur 5, som værende to ligebenede trekanter, hvilket synes at være en af de bærende ideer i et ræsonnement knyttet til denne originalkilde. Her syntes også at være grobund for at gribe denne tekstdel anderledes an i afprøvning 2.
- Under punkt 4 var det svært for eleverne, at arbejde med at formulere deres eget bevis ud fra titlen til Euklids sætning 7, bog IV. Her vil det formentligt være en fordel i at vælge titlen på en anden af Euklids sætninger, hvor det matematiske indhold er mere velkendt for eleverne, så de i højere grad kan fokusere på at formulere deres eget bevis. Derudover syntes det også svært for eleverne at formulere et bevis skriftligt. Derfor syntes der at være en mulighed i i højere grad at lade eleverne arbejde hermed mundtligt. Her kan screencast formentligt understøtte den del. Det var en god ide, at eleverne præsenterede deres forslag til konstruktioner og beviser undervejs i deres arbejdsproces hermed, fx kom det frem, at GeoGebra i nogle tilfælde kom til at udgøre en retfærdiggørende mediering, bl.a. fordi eleverne gjorde brug af GeoGebras funktioner: “Vinkelrette linjer” og “parallelle linjer” (Thomsen & Jankvist, 2020). Det blev her gjort til genstand for fælles diskussion i klassen, hvilket var et potentiale. Men det syntes også at lade sig gøre i denne klasse, bl.a. fordi klassestørrelsen var så lille. Her syntes fremadrettet at være et potentiale i at lade makkerpar

og grupper præsentere deres argumenter for andre makkerpar eller grupper undervejs i deres arbejdsproces, således at det kan medvirke til at kvalificere deres arbejde hermed.

| Billede 1 – konstruktionen ud fra konstruktionsdelen i Euklids sætning | Billede 2 – Et print der viser, hvad der sker med konstruktionen, når eleverne hiver i punktet A langs cirkelperiferien |
|---|---|
|  |  |

*Figur 5: Udskrift af gruppes arbejde i GeoGebra i afprøvning 0[18].*

### 4.6.2. Afprøvning 1

Afprøvning 1 foregår i en 5. klasse og 22 elever og en lærer deltager. Omdrejningspunktet er et udklip af Platons Menon[19]. Afprøvningen strækker sig over fire undervisningsgange af tilsammen ca. 10 lektioners varighed. Dertil kommer et indledende fokusgruppe interview med 3 grupper af elever og et afsluttende fokusgruppeinterview med to makkerpar. De overordnede aktiviteter i afprøvningen er:

1. Indledende semistruktureret fokusgruppeinterview med tre grupper af elever. Fokusgruppe-interviewene tager udgangspunkt i nogle på forhånd planlagte spørgsmål (Bilag 1) og derudover improviseres undervejs, hvis der opstår forskellige muligheder for at stille andre spørgsmål. Fokusgruppeinterviewet tager bl.a. udgangspunkt i forskellige geometriske figurer, som eleverne tidligere har arbejdet med i Kontext+ 5 (Andersen et al., 2015, s. 47). Under fokusgruppeinterviewet skal eleverne bl.a. arbejde med disse figurer i GeoGebra, som udgangspunkt stilles meget åbne spørgsmål til, hvordan de vælger at arbejde at gribe det an, og hvad de kan sige om figurerne. Fokusgruppeinterviewet indledes med, at der spørges til, hvordan eleverne tidligere har arbejdet med GeoGebra, hvad de lærte af det og forestiller sig, de kan lære af at arbejde med GeoGebra. Formålet med de indledende

[18] Disse to figurer er tidligere brugt i papers og posters til konferencer.

[19] Som nævnt tidligere arbejdes der med s. 32-41i Rangel-Nielsens (1906) oversættelse Menon.

fokusgruppeinterviews er at få et indblik i elevernes tilgange til at ræsonnere omkring geometriske figurer, når de arbejder med GeoGebra samt hvilke muligheder og begrænsninger, de selv ser ved at arbejde med GeoGebra. Det skal bruges i den videre planlægning af forløbet. Ligesom det kan sammenholdes med elementer fra de afsluttende fokusgruppeinterviews.

2. Læreren introducerer forløbet, formålet og fortæller lidt om den tid Platons Menon er skrevet på, om Sokrates – de redskaber han brugte i forhold til den matematiske problemstilling, hans syn på læring og måder at stille spørgsmål på. Formålet hermed er, at det bliver tydeligt for eleverne, at det handler om at ræsonnere og argumentere matematisk, samt at eleverne får et indblik i tiden, hvor originalkilden udspiller sig og får en forståelse for, hvordan teksten er bygget op. Det kan siges at være begyndelsen på at understøtte deres muligheder for at udvikle en historisk bevidsthed samt se, at der er forskel på den måde, der arbejdes med matematik i originalkilden og den måde, de kan arbejde med det i GeoGebra. Målene med forløbene blev i øvrigt også taget op undervejs i forløbet.
3. Klassen arbejder med teksten i fællesskab bid for bid. Læreren læser op af forskellige tekstbidder, der bl.a. er afgrænset af Sokrates' spørgsmål, således at læreren kan stoppe herved og inddrage eleverne i dialoger heromkring. Udvalgte steder skal eleverne arbejde med spørgsmålet i GeoGebra, før de diskuterer de forskellige svarmuligheder i klassen. Eleverne arbejder i makkerpar eller grupper og får udleveret et hæfte, hvori de kan klistre de forskellige tekstbidder ind og skrive kommentarer hertil undervejs. Læreren stopper også undervejs, hvis der er nogle særlige begreber, eller tekststykker, det er vigtigt, eleverne forståelsesmæssigt får afklaret, før de kan arbejde videre med teksten. Målet hermed er at understøtte elevernes dynamiske læsning, forstået på den måde, at de går i dialog med teksten i fællesskab, selvom læreren læser højt. Samtidig er målet, at eleverne arbejder med forskellige løsningsforslag og argumenter i den forbindelse, og på den måde både får muligheder for at arbejde med den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Umiddelbart er målet også her, at elevernes arbejde med GeoGebra udgør en pragmatisk mediering, som kan understøtte en senere epistemisk mediering.
4. Når de når til det sted i teksten, hvor Sokrates har udfoldet, men endnu ikke givet løsningen på hele problemet med at fordoble arealet af et kvadrat på 4 fod uden brug af lineal med måleenheder på og uden at give den endelige løsning endnu, bliver eleverne i makkerpar eller grupper sat til at løse problemet i GeoGebra med brug af de muligheder programmet indeholder. Det er altså mulig for eleverne fx at bruge målefunktionerne og dragging. Her er målet at understøtte elevernes muligheder for at udvikle både den undersøgende og

produktive side af ræsonnementskompetencen. Samtidig er målet, at eleverne får indblik i, hvilke andre muligheder deres arbejde med GeoGebra giver i forhold til de redskaber, der bliver brugt i teksten. Her formodes elevernes arbejde med GeoGebra at udgøre enten en retfærdiggørende, pragmatisk eller epistemisk mediering. Der samles ikke op på elevernes løsningsforslag i fællesskab, fordi eleverne efterfølgende skal arbejde med samme problemstilling i skolegården.

5. Eleverne arbejder i makkerpar med samme matematiske problemstilling i skolegården med en pind, snor og kridt. Inden arbejdet hermed introducerer læreren opgaven og lægger vægt på, at det er vigtigt, de forklarer og argumenterer undervejs i deres arbejde. Eleverne bliver også bedt om at skrive deres svar ned. Formålet med denne aktivitet er dels at understøtte elevernes muligheder for at udvikle den produktive side af ræsonnementskompetencen og dels at give dem mulighed for at udvikle en historisk bevidsthed i forhold til at få blik for de forskelle, der er i forhold til at arbejde med problemstillingen i GeoGebra og med pind, snor og kridt og i denne sammenhæng på den måde søge at give dem mulighed for at bruge det som et middel til at understøtte deres brug af den produktive side af deres ræsonnementskompetence. Målet hermed er yderligere at understøtte en strukturopfattelse, hvor eleverne får muligheder for at se relationen mellem de forskellige delelementer og regler der er i spil, når de løser opgaven.
6. Der samles op på elevernes løsningsforslag fra skolegården fælles i klassen. Her bruges GeoGebra på klassens smartboard og læreren styrer en samtale, hvor vigtige pointer fra elevernes svar udfoldes og diskuteres. Ligesom der lægges vægt på, at de i fællesskab får argumenteret for en generalisering af deres løsningsforslag. Her er målet igen, at eleverne får blik for, at deres arbejde med GeoGebra både kan have en pragmatisk og epistemisk medierende funktion – disse italesættes ikke direkte, men hives frem i forhold til, at læreren spørger til elevernes argumenter og spørger til, om det altid vil gælde. Derudover er målet, at eleverne understøttes i at udvikle deres undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen samt deres strukturopfattelse i form af, at eleverne bliver bedt om at forklare sammenhænge mellem de forskellige argumenter undervejs i opsamlingen. Det formodes ligeledes, at skiftet fra at arbejde med problemstillingen i skolegården til i GeoGebra medvirker til at understøtte eleverne i at udvikle en historisk bevidsthed, der giver dem blik for muligheder og udfordringer ved brug af de forskellige redskaber, som kan understøtte deres muligheder for at udvikle ræsonnementskompetencen. Sidst, men ikke mindst ses dette også som et led i, at de indgår i en dynamisk læsning af teksten, som efterfølgende læses færdig i fællesskab i klassen.

7. Eleverne arbejder med en lignende problemstilling bare med trekanter i GeoGebra. De skal konstruere en trekant, der er dobbelt så stor, som den de tager udgangspunkt i og argumentere for, hvorfor det gælder. Det skal de både gøre på skrift og over for en makker. Her arbejder de først enkeltvis med opgaven og efterfølgende argumenterer og diskuterer de deres løsningsforslag med en makker. De skal også skrive deres løsningsforslag ned og argumentere herfor. Der er en fælles opsamling herpå i klassen, hvor eleverne byder ind med deres løsningsforslag og argumentationer herfor. Her er formålet at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres produktive side af ræsonnementskompetencen. Derudover lægger denne opgave også op til, at eleverne får mulighed for at udvikle den undersøgende side af deres ræsonnementskompetence, eftersom de skal forsøge at følge og spørge ind til andres argumenter og ræsonnementer. Det formodes også, at elevernes arbejde med GeoGebra udgør en pragmatisk og formentligt også en epistemisk mediering, eftersom flere af makkerparrene forventes at ville arbejde med udgangspunkt i eksempler og så muligvis generalisere herudfra. Det afhænger bl.a. af, hvordan de bruger GeoGebras funktioner. I de tilfælde, hvor elevers arbejde med GeoGebra i første omgang, når de arbejder selvstændigt med opgaven, udgør en retfærdiggørende mediering, kan der måske ske en overgang til en af de andre typer medieringer, når den pågældende elev skal argumentere over for en makker. Det forventes ydermere, at en sådan øvelse lægger op til at understøtte en strukturopfattelse, i og med eleverne muligvis kan bruge dele af deres arbejde med problemstillingen fra Platons Menon eller Sokrates' måder at stille spørgsmål på i den forbindelse.
8. Efter forløbet gennemføres endnu to semistrukturerede fokusgruppeinterviews[20]. Her bliver eleverne præsenteret for de samme figurer (Andersen et al., 2015, s. 47), som i de indledende fokusgruppeinterviews og bliver spurgt åbent hertil, men også til, om de evt. kan bruge noget fra deres arbejde med Menon til at sige noget om de forskellige figurer (Bilag 2). Ligesom de bliver spurgt til, hvad de synes om at arbejde med samspillet mellem gamle tekster og GeoGebra, hvad de har lært samt om de har gode ideer til, hvordan man kan arbejde med samspillet i andre forløb. Formålet hermed er bl.a. at se, om eleverne af sig selv kan sige noget andet om figurerne her efter forløbet end før forløbet, samt at se om og i givet fald hvordan, de kan inddrage deres arbejde med Menon, hvis de bliver spurgt til det. Sidst, men ikke mindst er det vigtigt at høre, hvad eleverne har af ideer, der kan tages med videre.

[20] Her var planen, at det skulle have været de samme elever, der deltog her som i de indledende fokusgruppeinterviews, men det kunne ikke lade sig gøre på grund af Corona.

De ting, der viste sig i afprøvning 1, som hovedsageligt blev udgangspunkt for nye tiltag i afprøvning 2 var:

- Læreren spillede en afgørende rolle, både i forhold til at læse teksten op og orkestrere de forskellige dialoger i klassen. Selvom eleverne i afprøvning 2 i højere grad skal arbejde selvstændigt med teksterne, synes det givtigt at være mere opmærksom på lærerens rolle også i dialogen med de enkelte elever og grupper undervejs i deres selvstændige arbejde.
- Det virkede som om, det var en god ide på dette klassetrin at lade eleverne arbejde med kridt, snor og pind i skolegården, således at der var en vekselvirkning mellem elevernes arbejde med de forskellige redskaber under punkt 4, 5 og 6. Umiddelbart tages det ikke med i den næste afprøvning, da det vurderes, at det er tidskrævende i forhold til de ting, vi ellers skal nå. Det er også lidt usikkert, om det vil passe til aldersgruppen i afprøvning 2.
- Undervejs synes det svært for mange elever at formulere skriftligt, hvordan de løser opgaverne samt deres argumenter for, hvorfor deres løsninger gælder. Derfor bliver det vigtigt at fokusere mere på mundtlige produkter – screencast skal ind i afprøvning 2.
- Under punkt 7, hvor eleverne først skulle arbejde alene og dernæst diskutere med en anden elev, synes for mange elever og makkerpar at være givende i forhold til både at få den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen i spil. Derfor arbejdes der videre med lignende orkestreringer i afprøvning 2.
- I denne afprøvning blev de indledende og afsluttende fokusgruppeinterviews valgt, fordi det vurderes at passe til dette klassetrin. Det havde den fordel, at det var muligt at spørge mere ind til elevernes svar undervejs, men den ulempe, at det ikke tidsmæssigt var muligt at tale med alle eller mange elever. Derfor kan det være en ide i afprøvning 2, hvor eleverne er ældre, at få alle til at skrive noget ned omkring deres tidligere erfaringer med at arbejde med GeoGebra samt svare på spørgsmål, der retter sig mod forløbet i starten, under og i slutningen af forløbet.

### 4.6.3. Afprøvning 2

I afprøvning 2 deltager en lærer og en 7. klasse bestående af 22 elever. I denne afprøvning bliver der som i afprøvning 0 hovedsageligt arbejdet med Euklids fem første forudsætninger, bog I, samt sætning 6, bog IV. Afprøvningen strækker sig over seks undervisningsgange og tilsammen 11 lektioner: 3 x 1 lektion, 2 x 2 lektioner og 1 x 4 lektioner. De overordnede aktiviteter er:

1. Læreren introducerer forløbet, fortæller om *Euklids Elementer* og formålet med forløbet i forhold til at øve sig i at formulere matematiske argumenter og ræsonnementer. De overordnede mål italesættes jævnligt undervejs i forløbet. Dels for at tydeliggøre målene for eleverne og dels som afsæt for fælles samtaler omkring, hvad matematiske argumenter og ræsonnementer betyder. Hypotesen bag er, at det formentligt medvirker til, at eleverne udvikler et sprog, der gør dem i stand til at diskutere forskelle og ligheder mellem måderne at arbejde med argumentationer og ræsonnementer inden for konteksten af *Euklids Elementer* og inden for konteksten af GeoGebra. Det kan yderligere medvirke til at understøtte, at eleverne udvikler en historisk bevidsthed i forbindelse hermed som kan medvirke til at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.
2. Eleverne skal svare på spørgsmål omkring matematiske argumentationer og beviser (Bilag 3). Formålet hermed er, at eleverne får mulighed for at udvikle et sprog omkring matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser, således at de bliver bevidste om, hvornår de arbejder med det og kan have diskussioner heromkring med hinanden. Det formodes at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.
3. Eleverne skal svare på spørgsmål omkring at arbejde med GeoGebra, fx hvad de synes, de tidligere har lært af at arbejde med GeoGebra, hvad de synes er svært eller let, og hvad de forestiller sig, de kan lære af at arbejde med GeoGebra (Bilag 4). Formålet hermed er at give eleverne mulighed for at blive mere bevidste GeoGebrabrugere og på den baggrund forsøge at understøtte deres udvikling af en historisk bevidsthed, når de arbejder med GeoGebra i samspil med Euklids sætning mm.
4. Eleverne får tre gange en logbogsside med spørgsmål. De får en i starten, i midten og i afslutningen af forløbet. Her skal de bl.a. svare på, hvad de lærer mm. (Bilag 5). Formålet med logbogssiderne er at understøtte eleverne i at reflektere over egne læreprocesser samt at give eleverne mulighed for at give deres meninger til kende omkring dele af forløbet, således at disse kan medtænkes i planlægningen af det videre forløb.
5. Eleverne skal arbejde med titlen på Euklids sætning 34, bog I: *I et parallelogram er de modstående sider og vinkler indbyrdes lige store, og diagonalen halverer parallelogrammet* (Eibe 1897a, s. 49). Her skal de konstruere et parallelogram i GeoGebra og forklare samt argumentere for, hvorfor titlen gælder. Her arbejdes med mundtlige formuleringer og argumentationer. Denne titel er bl.a. valgt, fordi det er kendt matematisk stof for eleverne. Ræsonnementerne i forbindelse med denne titel synes umiddelbart mindre komplekse end dem, der knyttede sig til titlen på sætning 7, bog 4, som eleverne i afprøvning 0 arbejdede ud fra. Formålet med, at eleverne skal arbejde med titlen på Euklids sætning 34, bog I, tidligt

i undervisningsforløbet er at give eleverne mulighed for at starte med at arbejde med geometriske ræsonnementer, argumentationer og beviser med udgangspunkt i kendt matematisk stof, deres eget sprogbrug og med udgangspunkt i den produktive side af deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med GeoGebra. Det formodes yderligere at understøtte deres videre arbejdsproces med de øvrige opgaver i forløbet.

6. Eleverne skal have mulighed for at stille spørgsmål og få svar på sproglige udfordringer og matematiske begreber, når det gælder at læse og forstå Euklids fem forudsætninger, bog I. Derefter skal de selv arbejde i makkerpar med forudsætningerne i GeoGebra. Der samles op på arbejdet i en lærerstyret dialog i klasen med brug af GeoGebra på klassens smartboard. Formålet hermed er, at eleverne selv får mulighed for at have en dynamisk tilgang til at læse hhv. originalkilden og GeoGebra og derigennem yderligere understøtte en udvikling af både deres undersøgende og produktive side af tankegangskompetencen i forhold til at få og skabe sig indblik i "reglerne" bag euklidisk geometri og mulighederne og udfordringerne ved at bruge GeoGebra (Thomsen & Jankvist, in press).
7. I forbindelse med elevernes arbejde med teksten i sætning 6, bog I, bid for bid, knyttes der i denne afprøvning flere spørgsmål til nogle af "bidderne" end i afprøvning 0. De spørgsmål, der stilles til tekstbidderne lyder: "Hvad gjorde I jer af overvejelser undervejs?", "Er der noget særligt, I blev særligt opmærksomme på?", "Hvad?", "Ville I have ændret noget i teksten? Hvad? og hvorfor?", "Prøv at beskrive med jeres egne ord, hvad det er Euklid skriver", "Hvorfor gælder det", "Kan I blive overbevist om og overbevise andre om, at grundlinje AB er lig med grundlinje AD på en anden måde i GeoGebra?" Formålet hermed er at understøtte elevernes dynamiske læsning samt deres muligheder for at udvikle både den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Derudover har arbejdet med originalkilden og de tilhørende spørgsmål i samspil med GeoGebra bl.a. til hensigt at understøtte, at eleverne undervejs i arbejdet også reflekterer over forskellene på at arbejde med et matematisk indhold, argumentationer og ræsonnementer i teksten og i forbindelse med arbejdet med GeoGebra. På den måde er formålet også at understøtte muligheden for, at eleverne også kan udvikle en historisk bevidsthed samt at deres arbejde med GeoGebra i højere grad understøttes i at udgøre en epistemisk mediering.

   Ligesom der i denne afprøvning gøres mere ud af at introducere arbejdet med den tekstbid, der handler om at blive overbevist om, at det er rigtigt, at vinkel BAD er ret i en halvcirkel. I denne afprøvning lægges der op til, at eleverne skal arbejde med denne tekstbid ud fra en halvcirkel i GeoGebra. Umiddelbart synes det bedre at kunne understøtte elevernes arbejde med argumentationer og ræsonnementer, når de arbejder med denne tekstdel i GeoGebra.

Her kan eleverne ved hjælp af vinkelknappen i GeoGebra se, at den forbliver retvinklet uanset, hvorpå cirkelperiferien punktet trækkes hen (det kunne de også i afprøvning 0). Derudover vil de have muligheder for at sætte vinkelmål på de øvrige vinkler i trekanterne, således at de kan se på vinklernes indbyrdes forhold og argumentere med udgangspunkt i, at vinklerne er de samme ved vinkelbenene i hver af de to ligebenede trekanter. Når de trækker i punktet A, vil vinklerne i den ene trekant blive større og tilsvarende mindre i den anden trekant. Derudover har eleverne mulighed for at arbejde med vinklerne i trekant ABD, når den er "en halv kvadrat" (se afsnit 6.2.2.). Her er de tre radier, der udgør de to ligebenede retvinklede trekanters ben, placeret således, at de står vinkelret på hinanden i cirklens centrum. Det kan give anledning til argumenter, der omhandler reglerne omkring vinkler i et kvadrat. Formålet med opgaven er altså at give eleverne mulighed for at få og skabe sig indblik i samt formulere nogle af de bærende ideer i kæderne af argumenterne bag ræsonnementerne, dette bevis er bygget op omkring. Denne opgave lægger hovedsageligt op til, at eleverne skal bruge deres produktive side af ræsonnementskompetencen i forhold til selv at formulere argumenter, ræsonnementer og beviser, men den lægger også op til, at de får mulighed for at bruge den undersøgende side af ræsonnementskompetencen i forhold til at følge hinandens argumenter samt at give mulighed for, at de kan trække på deres forståelse og arbejde med resten af teksten. Det er en af årsagerne til, at denne opgave formodes også at understøtte elevernes strukturopfattelse. Et yderligere potentiale i opgaven er, at elevernes arbejde med GeoGebra kan veksle mellem at udgøre en pragmatisk og epistemisk mediering.

8. Eleverne sættes ikke som sådan til at præsentere foran og diskutere med klassen, da der synes at være mange nye ting for eleverne i dette forløb. Til gengæld sættes de ind imellem til at skulle præsentere deres argumenter og ræsonnementer for et andet makkerpar eller en ny makker. Ligesom der jævnligt samles op i klassen på og diskuteres forskellige delementer af de opgaver, eleverne arbejder med undervejs i forløbet. Det gøres som udgangspunkt ved, at læreren styrer den fælles dialog ved det fælles smartboard. Formålet med dette er at sætte eleverne i situationer, ud over deres makkerpar arbejde, hvor de mere fokuseret skal arbejde med at overbevise sig selv og andre. Det formodes i høj grad at understøtte elevernes muligheder for at udvikle både den undersøgende og produktive side af deres ræsonnementskompetence, at der lægges op til, at deres arbejde med GeoGebra kan udgøre en epistemisk mediering, at understøtte deres dynamiske læsning af hhv. teksterne fra *Euklids Elementer* og GeoGebra samt at understøtte elevernes strukturopfattelse.

9. Eleverne sættes også afslutningsvist til endnu engang at arbejde med titlen på sætning 34, bog 1: *I et parallelogram er de modstående sider og vinkler indbyrdes lige store, og diagonalen halverer parallelogrammet.* Eleverne bliver bedt om først at beskrive, hvordan de konstruerer et parallelogram og dernæst om at formulere en argumentation eller et bevis. Denne gang udvides opgaven med, at eleverne i makkerpar skal skrive deres svar ned. Formålet er, at eleverne på den måde får mulighed for at arbejde med argumenter og beviser, de tidligere har arbejdet med. Det formodes at understøtte deres muligheder for at formulere sig skriftligt, hvilket også er en del af, at de får muligheder for at udvikle både deres undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. I denne opgave vurderes det, at det hovedsageligt er den produktive side, der er i spil. Dertil kommer, at eleverne bliver bedt om at beskrive, hvordan de konstruerer et parallelogram i GeoGebra. Her formodes de også at få mulighed for at få blik for og evt. reflektere over, hvordan brugen af GeoGebra spiller ind på deres argumentation.

Der arbejdes videre med både afprøvning 1 og 2 i den retrospektive analyse på baggrund af den indsamlede data i de to afprøvninger.

## 4.7. Dataindsamling til hhv. lærebogsanalyse og afprøvninger

I dette afsnit gives en kort beskrivelse af de forskellige dataindsamlingsmetoder under hhv. lærebogsanalysen og de tre afprøvninger.

*Tekstbogsanalyse*

Her arbejdes med udvalgte materialer fra Alineas onlineportal omhandlende Kontext+ på mellemtrinnet (Alineas onlineportal; Hessing et al., +5 og +6) samt de tre elevbøger, der er knyttet hertil: Kontext+ 4 (Lindhardt et al., 2014), Kontext+ 5 (Andersen et al., 2015) og Kontext+ 6 (Andersen et al., 2016).

*Afprøvning 0*

I afprøvning 0 bestod dataindsamlingen hovedsageligt af elevernes skriftlige produkter, print fra GeoGebra samt film- og lydoptagelser af forskellige gruppers arbejde. Der var ofte et makkerpar, hvis gruppearbejde blev filmet, men generelt vurderes det, at der ikke var nogen særlig systematik i forhold til at filme grupperne. Derudover blev de fælles introduktioner, opsamlinger og dialoger i klassen filmet.

Liste over dataindsamling:

- Mine overordnede planlægningsnoter, mål for forløbet, fokusområder, forslag til originalkilder, forslag til opgaver mm. Disse revideredes evt. og der kom nye ideer til under møder med læreren.
- Filmoptagelser af klasseintroduktioner – og af udvalgte gruppers samtaler omkring forskellige opgaver. Det skiftede dog undervejs, hvilke grupper der blev filmet, så der var ikke nogen systematik heromkring.
- Lydoptagelser af forskellige dele af forskellige gruppers samarbejde.
- Film af forskellige gruppers løsninger undervejs i GeoGebra samt udenfor med pind, snor og kridt.
- Indsamling af elevprodukter: 1) gruppernes fælles hæfter, hvori de klistrede delelementer af originalkilden ind, 2) gruppernes svar i forbindelse med den udendørsopgave, hvor de arbejdede med pind, snor og kridt samt 3) enkelt elevers svar på afsluttende opgave med trekanter.
- Indledende og afsluttende fokusgruppeinterviews. 3 grupper af 3 elever deltog i de indledende fokusgruppeinterviews, mens 2 grupper af 2 elever deltog i det afsluttende.
- Lydoptagelse: Afsluttende interview med læreren.
- Mine kortfattede observationsnotater.

*Afprøvning 1*

I afprøvning 1 opstod nogle tekniske problemer omkring at printe og gemme i GeoGebra. Dertil kom, at en del af elevernes arbejdet i denne afprøvning var at arbejde med problemstillingen fra Platons Menon med pind, snor og kridt i skolegården. Derfor bestod dataindsamlingen i afprøvning 1 hovedsageligt af filmoptagelser, lydoptagelser og elevernes skriftlige besvarelser undervejs i forløbet. De fælles introduktioner, opsamlinger og dialoger i klasen blev filmet. Derudover var tanken, at der skulle fokuseres på enkelte gruppers arbejde undervejs i forløbet, men disse grupper blev hurtigt splittet på grund af Corona og derfor blev det ikke muligt. Det var også grunden til, at det heller ikke var muligt at lave et afsluttende fokusgruppeinterview med de samme grupper som i de indledende fokusgruppeinterviews. Generelt kan dataindsamlingen i form af filmoptagelser af gruppe/makkerarbejdet i afprøvning 1 siges at være lidt tilfældig.

Liste over dataindsamling:

- Mine overordnede planlægningsnoter, mål for forløbet, fokusområder, forslag til originalkilder, forslag til opgaver mm. Disse revideredes evt. og der kom nye ideer til under møder med læreren.
- Filmoptagelser af klasseintroduktioner – og af udvalgte gruppers samtaler omkring forskellige opgaver. Det skiftede dog undervejs, hvilke grupper der blev filmet, så der var ikke nogen systematik heromkring.
- Lydoptagelser af forskellige dele af forskellige gruppers samarbejde.
- Film af forskellige gruppers løsninger undervejs i GeoGebra samt udenfor med pind, snor og kridt.
- Indsamling af elevprodukter: 1) gruppernes fælles hæfter, hvori de klistrede delelementer af originalkilden ind, 2) gruppernes svar i forbindelse med den udendørsopgave, hvor de arbejdede med pind, snor og kridt samt 3) enkelt elevers svar på afsluttende opgave med trekanter.
- Indledende og afsluttende fokusgruppeinterviews. 3 grupper af 3 elever deltog i de indledende fokusgruppeinterviews, mens 2 grupper af 2 elever deltog i det afsluttende.
- Lydoptagelse: Afsluttende interview med læreren.
- Mine kortfattede observationsnotater.

*Afprøvning 2*

En konsekvens af dataindsamlingen i de to foregående afprøvninger blev, at der blev optaget screencast i afprøvning 2. Derudover blev det mere og mere tydeligt undervejs i de foregående forløb, at lærerens dialoger med enkelt elever, makkerpar eller grupper undervejs i det selvstændige arbejde var afgørende. Derfor blev lærerens dialoger med makkerparrene fulgt med ét kamera undervejs i forløbet. Ligesom de fælles introduktioner, opsamlinger og dialoger i klassen også blev filmet i denne afprøvning.

Liste over dataindsamling:

- Mine overordnede planlægningsnoter, mål for forløbet, fokusområder, forslag til originalkilder, forslag til opgaver mm. Disse revideredes evt. og der kom nye ideer til under møder med læreren.
- Filmoptagelse af fælles samtaler i klassen, få udvalgte gruppers arbejde og af lærerens samtaler med grupperne.
- Lydoptagelser af én udvalgt gruppe under de fleste af de gennemførte gruppearbejder.

- Elevprodukter: 1) Screencast af gruppernes opgavebesvarelser, 2) gruppernes skriftlige besvarelser af forskellige opgaver, 3) gruppernes svar på spørgsmål omkring beviser mm. og 3) tre logbogssider med udgangspunkt i spørgsmål, 1 fra hver uge, pr. elev.
- Lydoptagelser af to interviews med læreren, ét efter den første undervisningsgang og ét efter den sidste undervisningsgang.
- Mine kortfattede observationsnotater under og notater efter undervisningsgange.

Dataindsamlingen har altså også i sig selv gennemgået flere iterative processer, der hver og én samtidig knyttede sig til den lokale kontekst for de enkelte afprøvninger.

# 5. Analyse af lærebogssystem

Dette kapitel indeholder en analyse af den del af lærebogssystemet Kontext+, som er rettet mod mellemtrinnet, dvs. Kontext+ 4 (Lindhardt et al., 2014), Kontext+ 5 (Andersen et al., 2015) og Kontext+ 6 (Andersen et al., 2016) samt portalen for Kontext+ (Onlineportal; Hessing et al. +5 og +6)[21]. Lærebogssystemet er udvalgt, fordi klassen, der deltog i afprøvning 1, arbejdede med det som bogsystem og fordi en elev i afprøvning 2 refererer til Kontext 7 i én af vedkommendes svar i forbindelse med spørgsmålene på logbogsside 1. Det tyder på, at klassen arbejder med dette bogssystem. Dertil kommer, at Kontext+ synes at være et populært lærebogssystem[22] (Gissel et al., 2019). Udgangspunktet for analysen af lærebogssystemet er FS2:

> Hvilke særlige didaktiske overvejelser rettet mod at understøtte elever i at arbejde med koblingen mellem matematiske ræsonnementer og GeoGebra giver en analyse af udvalgte kapitler fra et lærebogssystem anledning til at være opmærksom på?

Formålet med lærebogsanalysen er todelt. På den ene side bruges den til at få et indblik i, hvilke typer opgaver, eleverne er vant til at arbejde med omkring koblingen mellem ræsonnementer og GeoGebra. Denne indsigt giver anledning til nogle opmærksomhedspunkter i forbindelse med design af opgaver og forløb til afprøvning 1 og 2. På den anden side formodes det, at forløb, der arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, kan medvirke til, at både elever og lærere får blik for nogle væsentlige ting omkring at arbejde med matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser, når de bruger digitale teknologier. Et blik, og evt. en fælles referenceramme, de også vil kunne bruge i deres arbejde med opgaverne i lærebogssystemet. På en sådan måde kan forløb med fokus på samspillet forhåbentligt også på sigt være med til at kvalificere arbejdet med lærebogssystemet. Derfor er det også et mål med lærebogsanalysen, at den bringes i spil igen i diskussionen (jf. kapitel 7) og sammenholdes med fundene fra de respektive analyser af afprøvningerne i kapitel 6. En vigtig pointe her er, at lærebogsanalysen primært kan ses i forhold til selve opgaveformuleringerne, eftersom det ikke

[21] Når der refereres til dette de forskellige dele af onlineportalen, refereres der til Alineas onlineportale for Kontext + 4, samt Hessing et al. + 5 og +6 for onlineportalsiden til hhv. Kontext+5 og Kontext+6. Disse referencer står i slutningen af referencelisten og leder frem til forsiden på pirtalen, det kræver login for at komme videre ind til de enkelte sider. Derfor disse overordnede referencer i dette kapitel.

[22] Gissel et al. (2019) har listet 7 analoge lærebogssystemer op efter popularitet på mellemtrinnet ud fra Københavns Kommunes egen opgørelse og her ligger Kontext+ øverst på deres liste. Det er selvfølgelig ikke givet, at dette også gælderi forhold til portalen og dermed de GeoGebra-opgaver, der ligger der og hører til de analoge bøger.

har været en del af projektet at gå nærmere ind i, hvordan klasserne rent faktisk har arbejdet med lærebogssystemet. Hensigten med lærebogsanalysen er altså ikke at beskrive en baseline, der kan give indblik i, hvilke matematiske områder, klasserne har arbejdet med inden afprøvningen.

Kapitlet indledes med en kort beskrivelse af lærebogssystemets opbygning samt af hvilke kapitler, der fokuserer på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence i arbejdet med GeoGebra. Formålet hermed er at give et overblik over lærebogssystemet og på den baggrund begrunde valget af kapitler herfra, der gøres til genstand for en kvalitativ analyse. Der er en anelse forskellige tilgang til analyserne af de udvalgte kapitler. Disse præsenteres indledningsvist i de afsnit, der omhandler analyserne. Kapitlet afsluttes med at beskrive, hvilke overvejelser analyserne giver anledning til i forbindelse med designet af afprøvningerne.

I det følgende refereres der til de pågældende elevbøger og sidetal, når der er fokus på særlige kapitler eller opgaver. Hvis der er særligt fokus på opgaver eller dokumenter fra portalen beskrives det i forhold til de klik/bjælker, de lå under på portalen (jf. næste afsnit). Den tekst, der skrives med kursiv i teksten, er et udtryk for eksempler på mine forslag til, hvad der evt. kunne have skærpet forskellige opgaver med henblik på at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Det kan være med til at understrege nogle af pointerne i forhold til analyserne af de pågældende opgaver i lærebogssystemet.

## 5.1. Opbygning af lærebogssystemet

Hovedparten af materialet til denne analyse er fra Alineas online portal i maj 2020. Undervejs i arbejdet med lærebogssystemet skiftede hjemmesiden lay-out, men det syntes dengang og stadig som om, at de forskellige materialer, der var tilgængelige på siden var og er de samme, blot organiseret på en lidt anderledes måde. Derfor tages der i denne analyse både udgangspunkt i materialet fra portalen fra maj 2020, materialer fra portalen sommer-efterår 2021 i kombination med de fysiske tekstbøger, elevbøgerne, der lægges op til at bruge i forbindelse hermed.

På portalen er der en indgangsside til hvert klassetrin. Den kan brugeren klikke sig rundt i og nogle klik leder brugeren hen til sider, der går på tværs af klassetrinene. Der er mulighed for at klikke sig ind på sider som: “Mål og årsplaner”, “Til læreren” og “Tavlebog”[23]. Sidstnævnte er en e-bog, som brugeren kan “bladre” rundt i på hjemmesiden og tilgå de forskellige tilhørende opgaver, fx i form af GeoGebra-filer. Det er også muligt at arbejde med “fysiske” elevbøger (Kontext+ 4, 5 og 6 – Matematik Kernebog/Web) i samspil med opgaverne på portalen. Der synes ikke indholdsmæssigt at være forskel på e-tavlebogen og elevbogen. Hvis brugeren trykker på “Træning” ledes vedkommende hen til et onlinetræningshæfte. Trænings-hæftet findes også som et fysisk træningshæfte (Poulsen & Lindhart, 2018). Ved et klik på “Til læreren” dukker forskellige nye muligheder op, så som: “Materialeliste”, “Eva-ark”, “Facit til Eva-ark”, “Alle hjælpeark”, “Oversigt over Grublere i GeoGebra med anvisning til facit”, “Oversigt over GeoGebra-filer” og “Alle regneark”. “Grublere i GeoGebra” er forskellige grublere, forskellige opgaver, der knytter sig til GeoGebra. Til “Elevbogen” hører også forskellige GeoGebra-opgaver. I nærværende analyse fokuseres der særligt på disse.

På baggrund af beskrivelsen af opbygningen af portalen vurderes den at indeholde et omfattende materiale til hvert enkelt af klassetrinene på mellemtrinnet.

Der henvises til Fælles Mål inden for hvert klassetrin, og brugeren kan også klikke sig ind på hhv. matematiske kompetencer og udvalgte stofområder, som leder videre til et billede af, hvilke kapitler, der fokuserer på de respektive kompetencer og stofområder. På den baggrund synes portalen at være nært knyttet til Fælles Mål.

Lærerbogssystemet er altså knyttet til Fælles Mål. Det betyder, at det er kompetencerne “Ræsonnement og tankegang” og “Hjælpemiddel” samt stofområdet “Geometri og måling”, der skal klikkes på, når omdrejningspunktet i nærværende lærebogsanalyse er koblingen mellem ræsonnementskompetencen og GeoGebra med henblik på opgaver med geometrisk indhold. Skemaet i figur 6 er en illustration over, hvilke kapitler i Kontext+ 4, 5 og 6, der kommer frem ved disse klik.

| | Kontext +4 | Kontext +5 | Kontext +6 |
|---|---|---|---|
| Ræsonnement og tankegang | 1 (Talsystemet og at gange)<br>2 (At dele)<br><u>3 (Form og tegning)</u><br>4 (Brøker) | <u>3 (Vinkler og figurer)</u><br>7 (Tal og bogstaver) | <u>4 (Kantede figurer)</u> |

[23] Dette er ændret siden den indledende analyse. Anno 2021 lægges der på portalen op til, at der arbejdes med en kombination mellem elevbog (Kontext+ Matematik Kernebog/Web) og opgaverne på sitet.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Hjælpemiddel | 3 (Form og tegning)<br>8 (Areal og omkreds) | 8 (Data og chance) | 3 (Tal og handel)<br>8 (Mønstre og figurer) |
| Geometri og måling | 3 (Form og tegning)<br>8 (Areal og omkreds) | 3 (Vinkler og figurer)<br>4 (Negative tal og koordinatsystemet)<br>6 (Rumfang og flade) | 2 (Cirkler)<br>4 (Kantede figurer)<br>7 (Rum og tegning)<br>8 (Mønstre og figurer) |

*Figur 6: Skema – Fordeling af kapitler i Kontext+ 4, 5 og 6 med fokus på hhv. "Hjælpemiddel", "Ræsonnement" samt "Geometri og måling".*

Udfra skemaet ses det, at nogle af kapitlerne dukker op i flere af de tre søgninger (de understregede kapitler). Disse formodes derfor at placere sig i spændingsfeltet mellem kompetencerne og stofområdet. Der er 9 kapitler, der er knyttet til stofområdet "Geometri og måling". Heraf er der 5 kapitler, der også knytter sig til hhv. "Hjælpemiddel" og "Ræsonnement og tankegang" og 3 af disse knytter sig til "Ræsonnement og tankegang". Kapitel 3 i Kontext+ 4 "Form og tegning" formodes at koble de to kompetencer og stofområdet, da det dukker op under alle tre søgninger. Derudover formodes det også umiddelbart, at kapitel 3 i Kontext+ 5 "Vinkler og figurer" kobler "Ræsonnement og tankegang" og "Geometri og måling". Det samme gør sig gældende for kapitel 4 i Kontext+ 6 "Kantede figurer". De to sidstnævnte kapitler har også GeoGebra-opgaver tilknyttet. Disse tre kapitler udvælges til nærmere analyse, fordi de på baggrund af ovenstående formodes at fokusere på en kobling mellem kompetencen "Ræsonnement og tankegang" og stofområdet "Geometri og måling", hvilket er det primære omdrejningspunkt for nærværende ph.d.-afhandling.

## 5.2. Analyse af kapitlet "Form og tegning"

Afsnittet indledes med en kort introduktion til kapitlet "Form og tegning" i Kontext+ 4, en præsentation af antal af opgaver heri, og hvordan de er fordelt. Formålet er at give et indblik i mængden af opgaver og kunne sætte det i spil i den efterfølgende analyse. Derefter præsenteres og analyseres de dokumenter på portalen, der beskriver, hvordan kapitel 3 "Form og tegning" i Kontext+ 4 knytter sig til Fælles Mål, samt hvilke læringsmål og tegn på læring, forfatterne formulerer med tilknytning hertil og dermed lægger op til, gør sig gældende for elevernes arbejde med kapitlet. Pointerne herfra sammenholdes overordnet med kapitlet "Form og tegning" og i særdeleshed med udvalgte opgaver, der er knyttet til arbejdet med GeoGebra. Derefter analyseres kapitlet med afsæt i de fire teoretiske distinktioner og betegnelse historisk bevidsthed. Det gøres på et mere overordnet plan, men også med udgangspunkt i udvalgte eksempler på opgaver i kapitel 3 “Form og tegning” i Kontext+ 4.

### 5.2.1. Overblik og antal opgaver

Kapitel 3 “Form og tegning” i elevbogen Kontext+ 4 (Lindhart et al. 2014, s. 44-63) indledes med et kort oplæg til en klassesamtale med udgangspunkt i et billede og en indledende aktivitet samt en kort opremsning af, hvad eleven skal arbejde med i dette kapitel. Sidstnævnte er formuleret som “I dette kapitel skal du arbejde med” (Lindhart et al., 2014, s. 45). Derefter kommer tre afsnit med hver deres tilhørende forskellige matematiske fokuspunkter sat i relation til “hverdagssituationer”. Der er knyttet forskellige GeoGebra-opgaver (som ligger på portalen) til nogle af opgaverne i elevbogen. Ligesom der er 6 sider i Træningshæfte/web 4 (Poulsen & Lindhart, 2018, s. 18-23), der er tilknyttet kapitlet ”Form og tegning”. Heri er der også forskellige GeoGebra-opgaver tilknyttet. De tre afsnit i elevbogen er:

- “Er vejene parallelle?” (s. 46-49) består af 9 opgaver plus en udfordring. Det matematiske stof fokuserer hovedsageligt på parallelitet, vinkelret, spidse og stumme vinkler. Der er knyttet GeoGebra-opgaver til 3 af opgaverne, til én af opgaverne er der knyttet 2 GeoGebra-opgaver, så det giver i alt 4 GeoGebra-opgaver. Her tager fortællingen omkring afsnittet afsæt i “Ole der kører taxi i byen Nyholm” (Lindhart et al., s. 46). Derudover er der 4 GeoGebra-opgaver i forbindelse med de opgaver, der i “Træningshæftet” er knyttet til “Er vejene parallelle?” (Poulsen & Lindhart, 2018, s. 18).
- “For fulde sejl” (Lindhart et al., 2014, s. 50-53) består af 8 opgaver og en udfordring. Her fokuseres hovedsageligt på sammenhæng mellem former, vinkler og længder på forskellige geometriske plane figurer. Der er knyttet GeoGebra-opgaver til 5 af opgaverne og til en af opgaverne er der knyttet 2 GeoGebra-opgaver – dvs. 6 GeoGebra-opgaver i alt. Derudover er der også knyttet en GeoGebra-opgave til udfordringen. I opgaverne på portalen er der imidlertid 10 opgaver knyttet til dette afsnit. Dette afsnit tager udgangspunkt i “Torben er sejlmager” (Lindhart et al., 2014, s. 50). Der er 1 GeoGebra-opgave i Træningshæftet knyttet til dette afsnit (Poulsen & Lindhart, 2018, s. 19)
- “Træerne skal fældes” (Lindhart et al., 2014, s. 54-55) består af 5 opgaver plus en udfordring. Matematisk er dette afsnit knyttet til arbejdet med koordinater og koordinatsæt. Her er det kun udfordringen, der har en GeoGebra-opgave tilknyttet. De personer, fortællingen i kredser om er Skovsfoged Simonsen og hans assistent Konradsen. Der er 1

GeoGebra-opgave i Træningshæftet knyttet til dette afsnit (Poulsen & Lindhart, 2018, s. 21).

Det vil sige, at der i de tre afsnit er 22 opgaver, hvoraf de 8 knytter sig til GeoGebra-opgaver (i alt 14 GeoGebra-opgaver).

Derudover er der 3 udfordringer, hvoraf den ene har en GeoGebra-opgave tilknyttet. I de her 3 afsnit er der i alt 25 opgaver, hvoraf de 9 har tilknyttede GeoGebra-opgaver (i alt 15 opgaver) samt i alt 6 GeoGebra-opgaver i Træningshæftet.

Herefter er der i elevbogen et afsnit med overskriften "Aktiviteter" (Lindhart et al., 2014, s. 56-57), hvori der indgår 3 forskellige aktiviteter. Der er knyttet 2 GeoGebra-opgaver til den ene af dem.

De efterfølgende to sider bærer overskriften "Viden om" (Lindhart et al., 2014, s. 58-59). De kan karakteriseres som en faglig og begrebsmæssig opsamling på de foregående afsnit. Her formulerer forfatterne definitioner og beskrivelser af nogle af de faglige begreber, der har været i spil i kapitlet. På de to "Viden om"-sider indgår 7 bokse med overskrifterne: "Linjer", "Parallelle linjer", "Linjer og vinkler", "Koordinatsystemet", "Figurer", "Trekanter" og "Firkanter". Til boksene "Linjer og vinkler", "Trekanter" og "Firkanter" er der tilknyttet GeoGebra-opgaver. Der er altså knyttet GeoGebra-opgaver til 3 opgaver og i materialet på portalen udgør disse i alt 6 opgaver.

Side 60-62 i "Form og tegning" (Lindhart et al., 2014) består af 21 forskellige "Breddeopgaver", der knyttes til de forskellige faglige områder, kapitlet omhandler. Heraf knyttes der GeoGebra-opgaver til 7 af dem.

Kapitlet "Form og tegning" afsluttes med én side, der kaldes "Eftertanken", som består af 3 opgaver og en opgave relateret til det, der kaldes "Huskeren" (Lindhart et al., 2014, s. 63). Ingen af disse har tilknyttede GeoGebra-opgaver. I skemaet i figur 7 præsenteres, hvordan opgaverne er fordelt i kapitlet "Form og tegning". I forhold til kolonnen, der omhandler GeoGebra-opgaverne, angiver de tal, der står uden for parenteserne, det antal opgaver i elevbogen, hvortil der er knyttet GeoGebra-opgaver. De tal der står i parentesen er det antal opgaver, der er på portalen tilhørende opgaverne i elevbogen. Sidstnævnte viser, at enkelte opgaver i elevbogen har tilknyttet flere GeoGebra-opgaver på portalen.

| Typer | Antal i alt | Antal opgaver med GeoGebra-opgaver tilknyttet |
|---|---|---|
| Opgaver + Udfordringer | 22+3 | 3(+1)+5(+1+1+3)+1 |

| | | |
|---|---|---|
| Aktiviteter | 3 | 1(+1) |
| Oplysningsbokse | 7 | 3(+3) |
| Breddeopgaver | 21 | 7 |
| Eftertanken – Huskeren | 4 | 0 |
| Træningshæfte | 4+6+6+2 | 4+1+1+0 |
| I alt | 78 | 26 (+10) |

*Figur 7: Skema – Antal opgaver i kapitel 3 i Kontext+ 4.*

Det skal fremhæves, at ifølge ovenstående tabel præsenteres eleverne på 23 sider for 60 opgaver, hvoraf der yderligere er mellem 20-30 GeoGebra-opgaver tilknyttet. Hvis eleverne derudover også har træningshæftet, er der på de 6 sider heri knyttet til kapitlet "Form og tegning" yderligere 18 opgaver og 6 GeoGebra-opgaver. I alt er der altså 78 opgaver med mellem 26 og 36 GeoGebra-opgaver tilknyttet. Hertil skal det yderligere fremhæves, at flere af opgaverne består af flere underspørgsmål. Dertil er der mulighed for at supplere med Grublere i GeoGebra. Umiddelbart kan det hævdes, at der er en ganske stor opgavemængde knyttet til kapitlet.

Hvis det sammenholdes med den tidligere nævnte rubrik på første side i kapitlet, hvori der står: "I dette kapitel skal du arbejde med", kan man stille spørgsmål til, om det af nogle elever og lærere kan forstås som, at de skal igennem alle disse opgaver for at arbejde hermed. Måske kunne en formulering, der i højere grad gik på, hvad tanken var, *at man kunne lære ved at arbejde med kapitlet*, måske danne større baggrund for at vælge forskellige opgaver ud, når der arbejdes hermed i de enkelte klasseværelser.

### 5.2.2. Fælles Mål, læringsmål og mulige tegn på læring

Som tidligere nævnt knytter dette kapitel sig til de matematiske kompetencer: "Ræsonnement og tankegang" samt "Hjælpemidler" og yderligere til stofområdet "Geometri og måling" i Fælles Mål. Det vises yderligere på portalen (Alineas onlineportal) under "Til læreren" i dokumentet "PDF Fælles Mål – skema, kapitel 3". Her vises en kopi af målmatrixen fra Fælles Mål for matematik "Efter 6. klassetrin", hvori de felter, der arbejdes med i kapitlet er fremhævet med grøn baggrund. Her fremgår det yderligere, at der i forhold til stofområdet "Geometri og måling" nærmere bestemt er fokus på færdigheds- og vidensmålsoverskrifterne "Geometriske egenskaber og sammenhænge", "Geometrisk tegning" samt "Placeringer og flytninger". Ligesom det fremgår, at der er fokus på 1. fase af færdigheds-og vidensmålsparrene både i forhold til kompetencerne og de udvalgte færidgheds- og vidensmålsområder fra stofområdet. Her fokuseres altså særskilt på 1. fase under færdigheds- og vidensmålsoverskrifterne, også selvom faserne med den reviderede udgave af Fælles Mål er blevet gjort vejledende i stedet for bindende. Disse Færdigheds- og vidensmålspar i Fælles Mål matrixen (efter 6. klasse) bliver yderligere udfoldet i under "Læringsmål til årsplanen". Her præsenteres formulering af både "Læringsmål" og "Tegn på læring *kan* være" i forhold til kapitlet "Form og tegning". Der er 5 læringsmål med hver 3 tilknyttede tegn på læring. Sidstnævnte kan give nogle mere konkrete ideer om, hvad der kan lægges i læringsmålene. De synes at være et udtryk for hvilke tegn, der over for eleverne kan indikere, at de er i gang med at arbejde med skridt på vej mod det pågældende læringsmål, da de er formuleret med afsæt i "Jeg (…)". Det er bemærkelsesværdigt, at der i selve læringsmålene bruges vendinger som, at eleverne skal kunne "beskrive", "tegne og beskrive" samt "sammenligne". Disse formuleringer stemmer på sin vis overens med formuleringerne i Fælles Mål i fase 1 omhandlende de ovenfor nævnte færdigheds-og vidensmålpar knyttet til stofområdet "Geometri og måling". Det kan dog diskuteres i hvor høj grad disse formuleringer synes at lægge op til at understøtte elevernes mulighed for at udvikle kompetencerne. Formuleringerne "beskrive", "tegne og beskrive" samt "sammenligne" synes at lægge op til, at eleverne skal kunne skærpe deres definitionsbeskrivelser, som i nogen grad kan understøtte dem i at udvikle deres tankegangskompetence og i nogen grad også kompetencen "Hjælpemiddel". Disse formuleringer synes dog ikke direkte at lægge op til, at eleverne skal understøttes i at kunne ræsonnere.

Tilgengæld synes der under de fleste læringsmål at være mindst 1 af de 3 tegn på læring, der knytter sig kompetencerne. Et af tegnene på læring formuleres fx som, at eleverne kan vise "at afstanden mellem to parallelle linjer måles vinkelret på linjerne" (Alineas onlineportal). Det kan eleverne kun gøre, hvis de måler vinklerne med præcision, uanset hvilket hjælpemiddel de bruger. Det stemmer fint overnes med færdighedsdelen af færdigheds- og vidensmålparret (fase 1) knyttet til "Hjælpemidler" i Fælles Mål, som lyder: "Eleven kan anvende hjælpemidler med faglig præcision" (Børne- og undervisningsministeriet, 2019a, s. 7). Andre tegn på læring lægger fx op til, at eleven enten viser, hvordan eleven anvender eller kan tegne parallelle linjer eller vinkelrette linjer med fx en tegnetrekant eller GeoGebra. Det kan tolkes som at lægge op til vidensdelen af færdigheds- og vidensmålsparret for "Hjælpemiddel" (fase 1) som lyder: "Eleven har viden om forskellige hjælpemidlers anvendelighed i matematiske situationer" (Børne- og undervisningsministeriet, 2019a, s. 7). Det kunne yderligere have været slået fast, hvis der også var blevet lagt op til, *at eleven kan argumentere for forskelle og ligheder, fordele og ulemper ved brug af de to forskellige hjælpemidler i de givne matematiske situationer, de opgaver, de skal arbejde med, lægger op til*. I forhold til ræsonnementskompetencen bruges der fx vendinger som: “Jeg udvikler og forklarer (…)”, “Jeg argumenterer for (…)”, “Jeg redegør (forklarer) (…)”. Hvilket synes at falde godt i tråd med indholdet i ”tankegang og ræsonnement” fase 1, som lyder:

> Eleven kan anvende ræsonnementer i undersøgende arbejde/Eleven har viden om enkle ræsonnementer knyttet til undersøgende arbejde, herunder undersøgende arbejde med digitale værktøjer. (Børne- og undervisningsministeriet, 2019a, s. 7)

På sin vis synes målbeskrivelserne: Læringsmålene og de tilhørende tegn på læring til kapitel 3 “Form og tegning” i Kontext+ 4 at lægge op til, at der i kapitlet arbejdes med, at eleverne hovedsageligt får mulighed for at udvikle deres matematiske kompetence “tankegang og ræsonnement”, men også i nogen grad kompetencen “hjælpemiddel”. Sidstnævnte kan diskuteres, fordi “digitale værktøjer” også udgør en del af beskrivelsen af vidensdelen af kompetencen ”tankegang og ræsonnement” i fase 1 i Fælles Mål. I forhold til kompetencen “hjælpemiddel” synes det som om, det vægtes, at eleverne bruger GeoGebra med præcission, men der synes ikke at lægges op til, at eleverne eksplicit reflekterer over programmets anvendelighed, hverken som i dette tilfælde blot et dynamisk tegneredskab, ej heller som et dynamisk tegneredskab, der understøtter deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

I det følgende analyseres de to første afsnit “Er vejene parallelle?” og “For fulde sejl”. De er udvalgt til nærmere analyse, fordi de fokuserer på geometriske former, på euklidsk geometri, som også er omdrejningspunktet i de to originalkilder, der arbejdes med i de tre afprøvninger. Afsnit 3 “Træerne skal fældes” fokuserer på koordinatsystemer, på analytisk geometri og indgår derfor ikke i nærværende analyse.

### 5.2.3. Første afsnit og tilknyttede GeoGebra-opgaver

I afsnittet “Er vejene parallelle” (Lindhart et al. 2014, s. 46-49) går mange af opgaverne ud på, at eleverne skal tegne og måle længder og størrelser på linjer og vinkler. Der synes ikke at være nogle formuleringer, der knytter sig til, at eleverne skal reflektere over, hvorfor det, de har tegnet eller målt, holder stik eller andre refleksioner i forbindelse hermed. Sådanne refleksioner og italesættelser heraf kan selvfølgelig sagtens foregå i klasseværelset alligevel både før, under og efter arbejdet med opgaverne. Men opgaveformuleringerne har ikke eksplicit fokus herpå.

Der er tilknyttet GeoGebra-opgaver til opgave 3, 4, og 5. I flere af dem skal eleverne tegne og undersøge noget i GeoGebra. Disse opgaver kan bestemt godt lægge op til, at eleverne formulerer argumenter, måske endda kæder heraf og dermed egentlige ræsonnementer, men opgaverne lægger ikke eksplicit op til det. Når der står undersøg, står der ikke i forlængelse heraf fx *forklar hvorfor din løsning er god, måske ligefrem den eneste rigtige eller om der er flere løsningsmuligheder eller andet og hvorfor/hvorfor ikke*, der mere eksplicit kunne spørge til elevernes ræsonnementer. Det mest målrettede spørgsmål herimod lyder: “Hvad sker der nu, hvis du trækker i punktet B med (ikon)?” (Alineas onlineportal). Hertil er der et svarfelt. Dette kunne yderligere skærpes, hvis det blev fulgt op med et spørgsmål, *hvor eleverne skulle prøve at forklare, hvorfor det sker*. I elevbogen bliver der i én underopgave spurgt “Hvorfor skal der være samme afstand mellem skinnerne” (Lindhart et al., 2014, s. 49). Her kan der siges, at der lægges op til at eleverne argumenterer. Generelt synes det dog ikke som om vægten lægges på elevernes argumenter, begrundelser og forklaringer.

### 5.2.4. Udvalgte GeoGebra-opgaver tilknyttet andet afsnit

I andet afsnit “For fulde sejl” (Lindhart et al., 2014, s. 50-53) i kapitel 3 “Form og tegning” i Kontext+ 4 lægger opgaverne i elevbogen i højere grad op til, at eleverne skal komme med forklaringer og beskrive, hvorfor forskellige karakteristika ved forskellige geometriske plane former gør sig gældende. Eksempler herpå er: 1) Opgave 1c, der handler om trekantede sejl, hvor eleverne bliver spurgt om: “Hvorfor kan sejlene ikke have to rette vinkler” (Lindhart et al., 2014, s. 50), 2) Opgave 3, hvor alle tre formuleringer af underopgaver indeholder “Find de sejl, der ligner (…), og begrund hvorfor” (Lindhart et al., 2014, s. 51). Disse opgaver lægger som sagt op til, at eleverne skal formulere forklaringer og argumenter. Her kan man også fremhæve, at disse opgaver også understøtter tankegangskompetencen, eftersom der på sin vis er særligt fokus på, at eleverne skærper deres forklaringer netop med hensyn til karakteristika, definitioner og regler omkring plane geometriske figurer. I hvor høj grad, der fokuseres på både ”Tankegang” og ”Ræsonnement” eller hovedsageligt på én af dem, afhænger selvfølgelig af de arbejdskontekster, elevernes arbejde med opgaverne indgår i. Det synes på mange måder at måtte afhænge af, hvordan eleverne understøttes i deres sproglige arbejde hermed i forhold til både at arbejde med fagbegreber, faglig præcision, argumentationer og evt. kæder heraf.

I de GeoGebra-opgaver på potalen, der er tilknyttet afsnittet, fremstår formuleringer som: “Brug (…) værktøjet til at tegne”, “Tegn (…)”, “Vis (…)” og “Undersøg (…)”. Dertil kommer, at der er i nogle af opgaverne er underopgaver, som har et svarfelt, hvori eleverne kan skrive et svar. Der er i alt 4 af den type underopgaver. Heraf indledes opgaveformuleringen til de 3 af dem med “Kan (…)”, altså et spørgsmål der kan svares ja eller nej til. Det ene af dem er formuleret som “Undersøg hvor mange (…)”. Her skal der altså skrives et tal i svarfeltet. Umiddelbart kunne man forestille sig, at opgaver, der havde tilknyttet et svarfelt også lagde op til, at eleverne kunne formulere nogle lidt mere uddybende svar, men det er umiddelbart ikke tilfældet. På sin vis synes det lidt svært at få helt øje på, hvordan disse opgaver skal kunne understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

Her er det interessant at påpege, at i den opgave, der i elevbogen kaldes “Udfordringen”, lyder således:

> Torben har et stykke stof på 12m x 5 m. Undersøg, om der er nok stof til, at han kan fremstille et af hvert af sejlene, Ocean, Water, Ekspedition, Columbus og Sea. (Lindhart et al., 2014, s. 53)

Disse typer af sejl repræsenterer, hver deres type af trekanter og er defineret på s. 50 (Lindhart et al., 2014). Det bemærkelsesværdige ved denne opgave er bl.a., at der eksplicit står, at eleverne skal undersøge, om det kan lade sig gøre, men der spørges ikke eksplicit til, *hvordan de vil planlægge deres undersøgelse ej heller til deres forklaringer af, hvorfor det kan lade sig gøre eller ikke gøre, endsige om de mener, de har fundet den eneste rigtige løsning eller ej m.m.* En opgave der ved første øjekast synes at indeholde et stort potentiale til at understøtte elevernes ræsonnementskompetence, men ved et kritisk blik i højere grad synes at understøtte udviklingen af deres problembehandlingskompetence. Til “Udfordringen” (Lindhart et al., 2014, s. 53) er der ydermere tilknyttet en GeoGebra-opgave. Her introduceres eleverne til, at Torben har et stykke stof og skal klippe sejl, der har en bestemt form. Han får seks sejl og fem stofrester i forbindelse med hans første forsøg. Derefter er der to opgaver som lyder:

> a) Tegn et forslag, hvor Torben skal klippe, så at der bliver flere sejl.
>
> b) Kan du helt undgå, at der bliver stofrester? (Svarfelt). (Alineas onlineportal, K4+14 “Flere sejl”)

Eleverne skal løse opgaverne i GeoGebra, hvor både stoffets form og sejlets form er givet. Ligesom det er vist, hvordan Torbens første forsøg så ud. Denne opgave synes heller ikke at lægge op til yderligere forklaringer i forhold til opgaveløsningen. På nogle måder synes opgaven at minde om den skrevne opgave i elevbogen – bortset fra, at det i GeoGebra-opgaven er samme type sejl, eleverne skal tage udgangspunkt i. Derudover er der sprogligt lagt nogle ekstra “oversættelser” ind. Forstået på den måde, at hvis man skal tage hele iscenesættelsen om, at Torben er sejlmager alvorligt, kan der opstå flere spørgsmål, der måske kan give anledning til forvirring for nogle elever eller for andre elever fordre en mere mekanisk løsning af den opgave, der bliver spurgt om. I opgaven står der, at Torben i første forsøg får 5 stofrester og eftersom den følgende opgave til eleverne går ud på, at de skal tegne et forslag til, hvordan

Torben får færre stofrester, må det formodes, at det er muligt. Med andre ord kan man undre sig over, at Torben ikke har planlagt sit klipperi lidt nøjere, så han undgik så meget spild af stof som overhovedet muligt. Selvom antallet af stofrester ikke nødvendigvis behøver at være et udtryk herfor. Det må vel formodes at være størrelsen af den samlede mængde stofrester, der er afgørende for Torben, hvis han vel at mærke gerne vil lave en god og måske endda klimavenlig forretning, hvor så lidt går til spilde som muligt? På den baggrund kan det også undre, at eleverne kun bliver bedt om at lave ét forslag. De bliver ikke bedt om at planlægge arbejdet med at udnytte stofresten bedst muligt. *Her kunne de udarbejde forskellige hypotesedannelser i forhold til stofrestens samlede areal i forhold til sejlets areal eller sejlets form i forhold til stofrestens form. De kunne overbevise sig selv og andre, om hvorfor deres løsning måtte være den bedste osv.* Men de bliver bedt om at lave ét forslag til, hvordan der kan klippes flere sejl af stofresten. *Her kunne eleverne også blive bedt om at sammenligne deres løsningsforslag med andre, hvis de ikke skulle gøre sig indledende overvejelser om forskellige løsningsmuligheder.* Denne opgave skal ses i lyset af, at afsnittet giver sig ud for, at opgaverne heri fokuserer på at skabe muligheder for at understøtte eleverne i at udvikle deres kompetencer ”tankegang og ræsonnement”. Ydermere er lige præcis denne GeoGebra-opgave tilknyttet den opgave i elevbogen, der kaldes “Udfordringen”. Derfor synes det næsten ironisk, at den opgave, hvor der er et svarfelt, er en af de opgaver, der er formuleret, så eleverne kan skrive et ja/nej som svar heri, eftersom den lyder: “Kan du helt undgå, at der bliver stofrester?” (Alineas onlineportal, K4+14 “Flere sejl”). Det kunne fx have været fulgt af et *prøv at give argumenter for hvorfor/hvorfor ikke.* I GeoGebra-opgaven kan eleverne klikke på “tip” og få et tip. I tippet til denne opgave står der, at det kan være en hjælp at bruge gitteret i GeoGebra. Hvis det ses i forhold til, at der i målene for arbejdet med kapitlet også lægges op til at understøtte en udvikling af den matematiske kompetence “Hjælpemiddel”, kan det siges at være et skridt på vejen, eftersom det viser eleverne en mulighed, de kan bruge i GeoGebra. Et skridt, som kunne være efterfulgt af flere skridt, hen imod en målopfyldelse. Her kunne opfølgende spørgsmål til eleverne også være, *hvilke muligheder for at bruge værktøjerne i GeoGebra ser I? Det kunne være før de løste opgaven. Igen kunne eleverne også sammenligne deres måder at bruge GeoGebra på bagefter. De kunne endda sammenligne deres egne måder at arbejde med denne opgave i GeoGebra med den måde, der er lagt op til at løse opgaven i elevbogen. I elevbogen lægges der formentligt op til at arbejde med lineal, vinkelmåler eller andre mere håndgribelige hjælpemidler.* Ovenstående skal tages med det forbehold, at de opgaver, der er analyseret hidtil, er rettet mod 4. klasse. Der synes at tegne sig et mønster, hvor der i selve opgaveformuleringen oftest lægges op til, at eleverne skal løse opgaven, fremfor at reflektere over, hvordan de finder frem til løsningerne, hvilke løsningsmåder, der er hensigtsmæssige eller forklare og argumentere for rigtigheden af deres resultater. Det synes som om små justeringer kunne have ført til mere kompetenceorienterede opgaveformuleringer. Når det er sagt, er det uanset, hvordan opgaverne er formuleret, som også tidligere antydet ikke i denne analyse muligt at analysere, hvordan arbejdet med opgaverne finder sted i klasseværelset. Ej heller i de klasseværelser, hvor afprøvningerne i dette projekt udfoldes.

### 5.2.5. Analyse med udgangspunkt i de fire teoretiske distinktioner

I dette afsnit ses de foregående analyser i lyset af de fire teoretiske distinktioner: 1) Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002), 2) De tre medieringsformer Misfeldt og Jankvist (2018) kalder: Epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering, 3) Statisk og dynamisk læsning (Mellin-Olsen, 1984), 4) Regel-og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984) samt historisk bevidsthed (Jensen, 2011).

Som de ovenstående analyser peger på, kan det til tider være svært at få helt øje på, hvordan opgaverne tilhørende kapitel 3 ”Form og tegning” i Kontext+ 4 eksplicit retter sig mod ræsonnementskompetencen. Derfor er det også svært at afgøre, hvorvidt der lægges op til, at både den undersøgende og produktive side heraf bringes i spil og i hvilket omfang, det mest er den ene eller den anden side, der er i forgrunden. I den forbindelse er det også værd at nævne, at der i rubrikken “I dette kapitel skal du lære om” ikke står noget om at forklare, argumentere eller ræsonnere, hvilket kan indikere, at der hovedsageligt lægges op til, at det er den undersøgende side af ræsonnementskompetencen, der sættes i spil. En understøttelse af, at eleverne får mulighed for at bringe den produktive side af ræsonnementskompetencen i spil kan dog godt ligge implicit i beskrivelsen af, hvad eleverne skal arbejde med. Det afhænger af, hvordan arbejdet med opgaverne udspiller sig i klasseværelset. Gennemgår læreren opgaverne og svarene, kan der være tale om, at eleverne forsøger at hægte sig på disse og dermed bruger den undersøgende side af kompetencen, mens eleverne i deres arbejde med opgaverne kan bruge den produktive side af kompetencen, hvis de fx prøver at overbevise sig selv eller hinanden med argumenter omkring løsningsforslag undervejs enten i selve arbejdet med opgaverne eller i tilhørende fælles opsamlinger i klassen. Umiddelbart synes der ikke helt at være overensstemmelse med formuleringen af læringsmålene til ”Form og tegning” på portalen (jf. afsnit 5.2.2.). På sin vis er det ærgerligt, at lærebogsforfatterne ikke i elevbogen og de tilhørende GeoGebra-opgaver på portalen benytter sig mere af nogle af de formuleringer, der er brugt i dokumentet under “Læringsmål til årsplanen” på portalen. Det kunne muligvis have givet et større fokus på i hvert fald ræsonnementskompetencen.

Hvis man ser på de tre medieringsformer i forhold til GeoGebra-opgaverne, der er knyttet til de to afsnit i kapitlet "Form og tegning", synes der i selve opgaveformuleringen at lægges op til, at arbejdet med GeoGebra udgør en pragmatisk mediering og måske endda en retfærdiggørende mediering, eftersom der oftest lægges op til, at eleverne skal tegne noget eller undersøge noget. I de tilfælde, hvor eleverne blot skal tegne noget, kan der være en risiko for at understøtte, at elevernes arbejde med GeoGebra udgør en pragmatisk mediering, de tegner noget og viser derved et eksempel, hvis de slet ikke skal forholde det til noget, kan der også være tale om, at elevernes arbejde med GeoGebra udgør en retfærdiggørende mediering, hvor eleverne ikke stiller nogle yderligere spørgsmål til deres tegninger, men blot tager dem for gode varer, uden at tjekke dem. Hvis det er den gængse tilgang til at arbejde med GeoGebra, kan det også blive en del af elevernes bevidsthed om, hvordan GeoGebra kan bruges som redskab. I de tilfælde, hvor eleverne bliver bedt om at undersøge noget, uden nogen videre opfølgning herpå, er der en risiko for, at GeoGebra kommer til at udgøre en retfærdiggørende mediering, eftersom eleverne kan foranlediges til at tro, at dette eller hint må gælde, blot fordi de har vist det i GeoGebra. Det kan også understøtte en pragmatisk mediering, eftersom eleverne her formentligt ofte vil give et eksempel på et læsningsforslag og forholde sig til det som et eksempel. Selvfølgelig kan det også spille sig anderledes ud, når eleverne og klasserne rent faktisk arbejder med opgaverne, men det ligger ikke eksplicit i selve opgaveformuleringen.

Det kan diskuteres i hvilken grad flere af opgaverne lægger op til, at eleverne skal arbejde ud fra en strukturopfattelse. Det er problematisk i den forbindelse, at der ikke eksplicit er fokus på, hvorfor reglerne virker, og hvordan de hænger sammen, men det kan i nogen grad synes at være tilstede i de opgaver, hvor eleverne skal undersøge forskellige ting og særligt i forhold til rækkefølgen, opgaverne kommer i i kapitlet. Her synes der flere gange at lægges op til, at eleverne skal bruge nogle af de ting, de tidligere har været igennem til at løse nye opgaver. Et eksempel herpå kan fx være i opgave 4 og 5 (Lindhart et al., 2014, s. 47), hvortil der også er GeoGebra-opgaver tilknyttet. Disse opgaver handler om parkeringspladser. Her skal eleverne i opgave 4 arbejde med at tegne parkeringsbåse, som går lige og har form som rektangler. I opgave 5 skal eleverne arbejde med at tegne skrå parkeringsbåse, som har former som parallelogrammer. Her kan det igen nævnes, at et lille spørgsmål, der fx går på *at bede eleverne om at sammenligne de to resultater, altså hvor mange biler, der kan være alt efter om parkeringsbåsene er placeret på den ene eller den anden måde på et areal af samme størrelse og hvorfor det mon er sådan,* kunne give anledning til at bringe ræsonnementskompetencen mere i spil. Ligesom det måske kunne give anledning til at tale om, *hvilke betydninger, det har* *for afsnittets hovedperson Ole, som kører taxa e.l. placeringen af parkeringspladserne i bybilledet*. I forhold til sidstnævnte, står der i opgaven, at det er på pladsen foran stationen. Den er tegnet ind på det bykort, der er et billede af som start på afsnittet (Lindhart et al., 2014, s. 46). Det kunne måske være en måde at gøre hverdagssituationerne mere vedkommende for eleverne og dermed skabe større mulighedsrum for en dynamisk læsning af teksten?

Generelt er det svært at afgøre, om der hovedsageligt lægges op til en dynamisk eller statisk læsning af teksten, da det igen afgøres af, hvordan der arbejdes med teksten. Hvis eleverne sættes til at arbejde "derudaf" med opgaverne, og det i sig selv bliver et mål at komme igennem dem, forekommer det sandsynligt, at der for flere elever vil være tale om en statisk læsning, hvor de ikke forholder sig særligt reflekterende til indholdet, bortset fra de steder, hvor de eksplicit bliver bedt om det. Samtidig kan det selvfølgelig lige såvel forekomme, at nogle elever kaster sig over opgaverne og arbejder reflekteret hermed og på den måde går i dialog med teksten, med opgaverne. Dog synes det som om, mængden af opgaver og opgavetyperne kalder på, at læreren skal orkestrere forskellige undervisningssituationer i forbindelse med arbejdet, hvis en dynamisk læsning af teksten skal understøttes.

Begge afsnit tager afsæt i fortællinger om personer, der beskæftiger sig med voksenerhverv, hvilket både kan understøtte og udfordre mulighederne for at skabe grobund for en dynamisk læsning undervejs i arbejdet med opgaverne. Som udgangspunkt synes formålet ikke at være, at eleverne umiddelbart kan identificere sig med hovedpersonerne i de tre afsnit i kapitel 3 "Form og tegning" (Lindhart et al., 2014, s. 46-55), da hverdagssituationerne i dette kapitel i nogen grad kan karakteriseres, som havende afsæt i et voksent perspektiv, eftersom det bl.a. relaterer sig til hhv. veje og parkeringsbåse, sejl på skibe samt træfældning sat i relation til hovedpersoners erhverv. Dette kan ses som en måde at understøtte stk. 3 i Fagets formål:

> Faget matematik skal medvirke til, at eleverne oplever og erkender matematikkens rolle i en historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng, og at eleverne kan forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse med henblik på at tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk fællesskab. (Børne- og undervisningsministeriet, 2019a, s. 3)

Sigtet med at lade hverdagssituationerne, matematikken i anvendelse, rette sig mod forskellige voksenerhverv, som er en del af det samfund og dermed det demokratiske fællesskab, hoved-personerne er en del af, kan i nogen grad siges at rette sig mod, at eleverne herved også får indblik heri – og de er også selv en del af et samfund, hvori der er voksenerhverv, så på den baggrund er en identifikation også mulig. Det gælder både i forhold til opgaverne i elevbogen og de tilhørende GeoGebra-opgaver. Hovedpersonerne, der er præsenteret ved deres erhverv, kan også ses i lyset af betegnelsen historisk bevidsthed, eftersom de erhverv, der er præsenteret i kapitlet kan ses som nutidige erhverv, hvor det matematiske indhold, der er omdrejningspunkt for et kapitel, indgår som en del af erhvervet. På den baggrund kan det understøtte, at eleverne ser sig selv som matematiske aktører ud fra forskellige erhverv. Umiddelbart synes en sådan identifikation ikke at være det primære sigte med kapitlet, eftersom der som tidligere nævnt på den første side er beskrevet, hvilke matematiske stofområder eleverne/den enkelte elev skal arbejde med.

## 5.3. Pointer fra de 2 andre udvalgte kapitler

I dette afsnit gives en kort overordnet analyse samt en kort analyse af de 2 andre udvalgte kapitler fra Kontext+ rettet mod mellemtrinnet set i lyset af de fire teoretiske distinktioner og betegnelsen historisk bevidsthed. Der er tilknyttet et afsnit til hvert af de to kapitler.

Hvis man sammenholder analyserne af de to ovenstående afsnit og generelt af kapitlet "Form og tegning" med de to øvrige kapitler i hhv. Kontext+ 5 og 6, som særligt fokuserer på "Ræsonnement og tankegang", nemlig kapitlerne "Vinkler og figurer" i Kontext+5 (Andersen et al., 2015, s. 42-63) og "Kantede figurer" i Kontext+6 (Andersen et al., 2016, s. 72-95) synes strukturen og de forskellige typer afsnit at følge samme snit som i kapitlet ”Form og tegning" i Kontext+ 4 (Lindhart et al., 2014, s. 44-63). Den samlede mængde af opgaver i elevbøgerne ser også ud til at stemme nogenlunde overens med mængden af opgaver i "Form og tegning", men der er lidt færre GeoGebra-opgaver tilknyttet de to kapitler i Kontext + 5 og 6. Derudover er der også to overordnede forskelle: 1) På første side af hver af kapitlerne er der en rubrik, hvor der står "I dette kapitel skal du lære om" og 2) De afsnit, hvor hverdagssituationerne knytter sig til voksenerhverv, er der knyttet børn til fortællingen – børnene kommer på besøg i de voksnes værksteder. Punkt 1) synes i nogen grad at lægge op til en mere selektiv brug af opgaverne i kapitlerne. Her kan der dog spørges til, om lærebogsforfattere kan bestemme, hvad en elev "*skal* lære" – her kunne *kan du lære* måske være mere sigende for en undervisningssituation? Punkt 2) synes at være et forsøg på at give eleverne større mulighed for at identificere sig med personerne i teksten. Det understøttes yderligere af, at der også er afsnit, der handler om skoler, fx at bygge drager på en skole.

### 5.3.1. Kapitlet "Vinkler og figurer"

I kapitlet "Vinkler og figurer" er der en del opgaver, der knytter sig til at tegne, måle, kategorisere og genkende forskellige typer og størrelser af vinkler. Generelt synes der at være flere opgaver i elevbogen, som lægger op til, at eleverne skal ræsonnere, men de bliver ikke eksplicit bedt om at forklare, hvordan de kommer frem til et resultat eller argumentere for, hvorfor det gælder. Et eksempel herpå kan være opgave 10, som lyder:

a) Tegn en tegning af dragesnoren, som er i en vinkel på 50 grader.

b) Mål højden og beregn, hvor højt oppe dragen er.

c) Hvad vil vinklen være, når dragen er 25 m oppe i luften? (Andersen et al., 2015, s. 53)

Her lægges der fx ikke op til, at eleverne skal afgive en hypotese, ej heller en forklaring eller et argument i forbindelse med hverken "b" eller "c". De skal løse opgaven og forventes måske at kunne indgå i en fælles diskussion i klassen eller kunne diskutere det med deres makker(e), hvis de samarbejder undervejs i arbejdet med opgaven. Der hvor ræsonnementskompetencen måske kommer tydeligst i spil i kapitlet er i den aktivitet, der har overskriften: "Er vinkelsummen i en trekant 180 grader?" (Andersen et al., 2015, s. 56). Her arbejder eleverne fysisk med sammenhængen mellem at klippe halvcirkler i tre dele og tegne en trekant ved at sætte hver cirkeldel som et hjørne af en trekant. Her repræsenterer cirkeldelens vinkelspids altså trekantens vinkler. Ligesom de skal gøre det modsatte ved at klippe buede hjørner af en trekant og sammensætte dem til en halvcirkel. Denne aktivitet afsluttes også med en GeoGebra-opgave, hvor GeoGebra-vinduet giver eleverne mulighed for at udføre samme øvelse, bare i GeoGebra. Her kan eleverne ydermere ændre på vinklernes størrelser ved at hive i trekantens forskellige hjørner. Der er også et svarfelt tilknyttet én af underopgaverne, opgave b. Hvori der står: "Gælder det alle trekanter? Prøv at ændre trekantens form" (Hessing et al., +5). Her er altså igen tale om et spørgsmål, der kan svares ja eller nej til. MEN der spørges til en generalisering, og ikke nok med det, der spørges til den, før eleverne bliver opfordret til at ændre trekantens form. Derfor kan den opgave lægge op til en epistemisk mediering, der bygger på ét arbejde med eksemplerne, hvor eleverne arbejder med "statisk geometri", og den første opgave i GeoGebra-opgaven svarer hertil. Eleverne bliver først bedt om at bruge dragging, at bruge GeoGebra dynamisk, efter de har forholdt sig til, om det er generelt for trekanter. Selve GeoGebra-opgaven lægger op til en pragmatisk mediering efterfulgt af en epistemisk mediering, der yderligere understøttes af en dynamisk pragmatisk mediering. I opgaven før denne opgave bliver eleverne bedt om at tegne en tilfældig trekant, måle de tre vinkler i trekanten, lægge summen af de tre vinkler sammen og afslutningsvist bliver de spurgt, om vinkelsummen ændrer sig, når de ændrer trekantens form. Dette kan i højere grad karakteriseres som en opgave, der lægger op til en retfærdiggørende mediering, eftersom eleverne blot bliver spurgt om at aflæse resultaterne i GeoGebra. De øvrige GeoGebra-opgaver tilknyttet dette kapitel kan generelt synes at have et sigte, der handler om at gøre eleverne fortrolige med vinkelmålerredskabet i GeoGebra, hvilket måske også som en biting kan have en effekt, der medvirker til, at eleverne opfatter GeoGebra som et retfærdiggørende redskab, snarere end et der kan bruges til at forstå og danne afsæt for forklaringer og argumentationer via eksempler eller til at understøtte en forståelse af og argumentationer i forbindelse med mere generaliserbare argumenter, ræsonnementer eller beviser. Det kan måske også få den konsekvens, at eleverne får en opfattelse af, at det er en regelopfattelse, der værdisættes, når de arbejder med lærebogssystemet. Forstået på den måde, at der er en stor mængde opgaver, der skal løses og det synes i høj grad at være løsningerne, der tæller – ikke argumenterne og forståelserne bag disse. En sådan analyse kan selvfølgelig ikke stå alene, fordi et bogsystem ikke står alene. Det afhænger af den eller måske rettere de kontekster, det bliver brugt i. Her kan organiseringen af arbejdet samt de tilhørende undervisningssituationer og dialoger i den forbindelse have stor betydning. Her kan kapitlet bestemt medvirke til, at der i klasserummet bliver lagt vægt på en større grad af strukturopfattelse, eftersom opgavetyperne og de stofområder de knytter sig til muliggør et fokus på sammenhængende strukturer.

I dette kapitel synes der ikke at være særligt fokus på at understøtte, at eleverne får mulighed for at udvikle en historisk bevidsthed, om end der kan gøre sig de samme argumenter gældende i forhold til kapitlet “Form og tegning”. Eleverne får mulighed for at identificere sig med børn, der besøger voksne på deres arbejdspladser samt børn, der arbejder med dragerbygning på en skole.

En afrundende bemærkning omkring dette kapitel omhandler beskrivelsen af, hvad eleverne skal lære om, altså den tidligere nævnte rubrik på den første tekstside af kapitlet. Beskrivelsen af, hvad eleverne skal lære, tager udgangspunkt i verberne: “beskrive”, “måle”, “undersøge”, “aflæse”, “konstruere og tegne”. Disse beskrivelser kan lægge op til, at man i klassen italesætter, hvornår en undersøgelse kan siges at være matematisk, og om der er særlige ting, der gælder i forhold til en sådan. Det kan selvfølgelig ikke konkluderes, at der ikke lægges vægt på “Ræsonnement og tankegang” i elevernes “første møde” med kapitlet, men det kunne have været understreget ved at synliggøre det i højere grad over for eleverne ved at bruge ord som at *forklare, argumentere, ræsonnere og stille spørgsmål* i forbindelse med formuleringen af, hvad sigtet er eleverne skal lære i kapitlet.

### 5.3.2. Kapitlet “Kantede figurer”

Kapitlet “Kantede figurer” i Kontext+6 indledes også med, at der på den første tekstside (Andersen et al., 2016, s. 73) er en rubrik rettet til eleven omkring, hvad eleven skal lære. Her bliver der lagt op til, at eleverne skal lære om “at beregne…” og “at konstruere” i de første to beskrivelser. Derefter rettes de følgende beskrivelser af, hvad der skal læres mod selve stoffet, og de lyder: “forskellige typer af trekanter og firkanter”, “forskellige typer af kantede figurer” og “at to figurer kan have samme form med forskellig størrelse”. Som tidligere nævnt rummer det forskellige muligheder i klasserummet, men ræsonnementskompetencen synes heller ikke her at være eksplicit i centrum i beskrivelsen til eleverne. Når det så er sagt, så synes det generelt som, at flere af opgaveformuleringerne i elevbogen mere eksplicit har fokus på, at eleverne skal sætte ord på deres ræsonnementer undervejs i kapitlerne. Det kommer bl.a. til udtryk ved formuleringer som i fx opgave 2d: “Beskriv hvordan man omregner fra $cm^2$ til $mm^2$ og omvendt” (Andersen et al., 2016, s. 74), og opgave 6d: “Hvorfor kan man regne sig til, at den sidste vinkel må være 70 grader” (Andersen et al., 2016, s. 80). Opgaver som disse lægger op til en sprogliggørelse af argumenter og ræsonnementer i forbindelse med opgaverne. Det synes også at gøre sig gældende på en del af siden med “Aktiviteter”, der bærer overskriften: “Undersøg linjer i trekanter” (Andersen et al., 2016, s. 86-87). Et eksempel herpå er spørgsmål som 1b: “Hvorfor mødes højderne i en ligesidet trekant i trekantens midtpunkt” (Andersen et al., 2016, s. 86). I dette kapitel synes den produktive side af ræsonnementskompetencen at blive bragt væsentligt mere i spil end i de foregående analyserede afsnit.

Derudover er det værd at bemærke, at der er GeoGebra-opgaver knyttet til alle opgaverne på disse “Aktivitetssider”. Spørgsmål 2b lyder: “Beskriv med egne ord nogle egenskaber ved midtnormalen i en trekant” (Andersen et al., 2016, s. 86). Det spørgsmål synes særligt at rette sig mod at sætte tankegangskompetencen i spil. Ligesom det giver eleverne mulighed for at indgå en dynamisk læsning, hvor de skal bruge deres egne ord og være med til at give teksten indhold. Det er et generelt kendetegn ved disse, her er dog en opgave undtaget, at eleverne bliver bedt om, at undersøge forskellige forhold ved trekanter undervejs i opgaverne. I sig selv kan man sige, at det i høj grad synes at fordre en dynamisk læsning fra elevernes side, eftersom deres undersøgelser synes vigtige, fremfor at de bare bliver præsenteret for formuleringer af definitioner af forskellige forhold ved trekanter. Dertil kommer, at det også i højere grad synes at lægge op til, at eleverne kan “gå til” opgaverne ud fra en strukturopfattelse i stedet for ud fra en regelopfattelse. Hver opgave på aktivitetssiderne har en a-del og en b-del med tilhørende spørgsmål. Spørgsmålene til a-delen synes at lægge op til, at eleverne kan arbejde ud fra en regelopfattelse, hvor spørgsmålene til b-delen i højere grad lægger op til, at eleverne skal arbejde med strukturerne bag reglerne. Sidst men ikke mindst synes en sådan tilgang som i b-delen også at lægge op til, at GeoGebra kan udgøre en epistemisk mediering.

I tråd med analyserne af de foregående kapitler synes dette kapitel heller ikke at vægte at understøtte, at eleverne får mulighed for at udvikle deres historiske bevidsthed, men det kan forekomme indirekte gennem deres arbejde med de forskellige hverdagssituationer, der er lagt op til, at de matematiske situationer udspiller sig i.

En kort opsamling her kan også være at minde om, at de foregående analyser af de kapitler, der ifølge bogssystemet særligt fokuserer på ræsonnementskompetencen, er præsenteret i en kronologisk rækkefølge. Forstået på den måde, at kapitlet "Form og tegning" er fra Kontext+4, kapitlet "Vinkler og figurer" er fra Kontext+5 og kapitlet, dette afsnit omhandler, er fra Kontext+ 6. På den baggrund kan analyserne også synes at understøtte, at der er tale om en progression i forhold til at udvide de eksplicitte "opfordringer" til eleverne om at sætte ord på deres argumenter og ræsonnementer. Selvom der synes at være mere fokus på ræsonnements-kompetencen i Kontext+6, synes stadig at være forskellige områder, det kan være værdifuldt at være opmærksom på at kvalificere, hvis man skal planlægge et forløb med henblik på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

## 5.4. Opsamling på opmærksomhedspunkter til planlægningen af afprøvningerne

I dette afsnit præsenteres de særlige opmærksomhedspunkter, der er fremkommet under analysen af lærebogssystemet Kontext+ til mellemtrinnet samt hvilke didaktiske overvejelser, de giver anledning til i forbindelse med afprøvningerne.

En af de vigtigste generelle opmærksomheder er egentligt et kritisk blik på mængden af opgaver, og at der er mange opgaver, hvori eleverne bliver bedt om at gøre eller løse dette eller hint uden at skulle begrunde, forklare og argumentere for deres løsningsforslag. Det kan bindes sammen af målene for forløbene og de enkelte opgaver, der indgår heri. Som beskrevet ovenfor synes disse sammenhænge ikke at være tydelige i de 3 analyserede kapitler, hverken i analysen af kapitlerne ej heller i præsentationen til eleverne.

I forhold til at skabe rum for udvikling af ræsonnementskompetencen fremgår det i lærebogsanalysen flere gange, at eleverne i opgaverne bliver bedt om at undersøge dette eller hint, men det følges ikke altid særlig meget op i de pågældende eller efterfølgende opgavefor-muleringer. Det kan tolkes som, at det implicit fordres, at læreren samler op på dette og orkestrerer, at eleverne får mulighed for at argumentere m.m. i forbindelse med deres undersøgelser.

I forhold til at arbejde med lærebogssystemet ud fra en dynamisk læsning kan det fremhæves, at der er flere muligheder herfor, hvis disse altså gribes og udfoldes af læreren. Som udgangspunkt synes antallet af opgaver, at eleverne ikke eksplicit særlig ofte bliver bedt om at argumentere og forklare, hvordan de finder frem til resultaterne. I det hele taget synes det at finde resultater at være en stor del af elevernes arbejde med kapitlerne. Det skal igen fremhæves, at eleverne flere steder bliver bedt om at undersøge noget, hvilket kan ses som en mulig understøttelse af en dynamisk læsning. Her er det dog ærgerligt og måske særligt i GeoGebra-opgaverne, at en undersøgelse ofte er efterfulgt af en mulighed for at svare i et meget begrænset svarfelt. Det synes igen at indikere, at det vigtige er at finde frem til resultatet. Det kan måske karakteriseres som at lægge op til en statisk læsning af hhv. selve opgaveteksterne og i forbindelse med arbejdet med GeoGebra.

Umiddelbart kan det tolkes som om, at lærebogssystemet rettet mod mellemtrinnet hovedsageligt lægger op til, at GeoGebra kan udgøre retfærdiggørende og pragmatiske medieringer under elevernes arbejde med opgaverne. Det synes klart, at der ligger en kvalificeringsmulighed i i højere grad at fokusere på at understøtte muligheder for epistemiske medieringer, også i selve opgaveformuleringerne. Det gælder særligt for kapitlet "Kantede figurer" i Kontext+6.

Opbygningen af rækkefølgen, de faglige områder kommer i spil i de forskellige kapitler, kan ud fra et strukturopfattelsesperspektiv synes hensigtsmæssig, forstået på den måde, at det giver muligheder for at bygge sammenhænge mellem forskellige delelementer inden for arbejdet med geometri. Samtidig kan det også hævdes, at mængden af opgaver og formuleringer, der lægger vægt på, at eleverne afgiver svar, synes at lægge op til, at eleverne let kan komme til at arbejde ud fra en regelopfattelse.

I kapitlerne indgår flere forskellige erhverv i forhold til at præsentere og løse forskellige matematiske problemstillinger eller til at illustrere evt. matematikholdige situationer. Umiddelbart kan det synes at måtte være lidt svært for eleverne at identificere sig hermed, men de kan også ses som muligheder for at skabe rum for, at eleverne kan udvikle en historisk bevidsthed.

I forhold til afprøvningerne giver lærebogsanalysen særligt anledning til følgende didaktiske overvejelser:

- Hvis eleverne præsenteres for, at de igennem arbejdet med samspillet med originalkilder og GeoGebra får mulighed for at udvikle og bruge deres ræsonnementskompetence, skal det også være tydeligt for eleverne igennem forløbet. Det kan bl.a. gøres ved eksplicit at italesætte det i formuleringer af mål for forløbet og forskellige dele heraf.
- Det skal ligeledes ekspliciteres direkte i opgaverne, at eleverne skal argumentere, forklare, ræsonnere eller bevise. Derudover synes det at være en god ide bevidst at sætte eleverne i samarbejdssituationer, hvor de bliver sat til at lytte, argumentere, overbevise og lade sig overbevise af hinanden. Ligesom læreren skal være opmærksom herpå i de fælles opsamlinger i klassen samt i sin dialog med grupper af elever. Det kan medvirke til både at sætte den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen i spil.
- Der skal rettes en opmærksomhed mod antallet af opgaver i afprøvningerne. Der skal løbende introduceres og samles op på opgaverne for at understøtte, at eleverne ikke bare arbejder "derudaf" uden at reflektere over deres tilgange til opgaverne og deres opgavebesvarelser. Her kan korte gruppearbejder, der netop indledes med en fælles introduktion og afsluttes med en fælles opsamling danne grobund herfor. Ligesom større svarfelter, hvor eleverne selv skal formulere sig, kan bruges til at understøtte elevernes muligheder for at arbejde med en dynamisk læsning af både originalkilden og GeoGebra samt med eksplicit at formulere argumenter og ræsonnementer.
- En epistemisk mediering kan understøttes bl.a. ved at lade eleverne inddrage brugen af GeoGebra i forhold til understøtte deres argumenter for løsninger eller forklaringer i forbindelse med forskellige delelementer af originalkilden. Eller ved at skabe situationer, hvor det bliver muligt for eleverne at få øje på og italesætte, at de kan gøre noget andet i GeoGebra end de kan, hvis de arbejder med fx pen og papir. Det synes vigtigt at være opmærksom på at bruge forskellige typer af mediering bevidst, således at fx en pragmatisk mediering kan understøtte en efterfølgende epistemisk mediering.
- Originalkilderne kan i nogen grad i sig selv lægge op til en strukturopfattelse, eftersom de omhandler de bagvedliggende forklaringer, ræsonnementer og beviser omkring udvalgte geometriske figurer og forhold herimellem. En yderligere understøttelse af elevernes muligheder for at udvikle en strukturopfattelse kan være at sætte eleverne i forskellige før- og eftersituationer, hvor der lægges op til, at de enten understøttes i at skabe brobygning til arbejdet med originalkilden eller til, at eleverne kan agere i andre matematiske situationer, hvor de kan trække på arbejdet med originalkilden.

- I forhold til at understøtte elevernes mulighed for at udvikle en historisk bevidsthed med henblik på at bruge denne som middel til at understøtte deres ræsonnementskompetence, synes det vigtigt, at eleverne bliver sat i situationer, hvor de kan identificere sig med at være aktører i forskellige matematikholdige situationer, der ligger i spændingsfeltet mellem gamle, historiske, tekster og muligheder for at arbejde med at forstå dem, med selve problemstillingerne og evt. udvide rummet for at kunne argumentere, ræsonnere og bevise i en nutid kontekst med nutidige dynamiske geometri software til rådighed.

Kapitlerne i Kontext+ fokuserer bl.a. på den matematiske kompetence, der er beskrevet i Fælles Mål "Ræsonnement og tankegang". De to kompetencer formodes altså slået sammen i designet og måden kapitlerne lægger op til at arbejde med de forskellige opgaver. Det kommer til syne, når der lægges vægt på tankegangskompetencen i form af, at eleverne fx skal give nogle definitioner på geometriske forhold og enkelte gange knyttes disse til, at eleverne skal undersøge eller forklare noget. Men der synes ikke som sådan, at blive lagt vægt på, at tankegangskompetencen bringes i spil i forhold til at sætte eleverne i situationer, hvor der giver indblik i forskellige typer af argumenter eller ræsonnementer. Denne gensidige kvalificering af arbejdet med hver af disse kompetencer kan bruges aktivt i arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra (Thomsen & Jankvist, in press).

## 6. Retrospektiv analyse af afprøvninger

Ifølge fx Cobb et al. (2017) indgår det samlede sæt af data i den retrospektive analyse. På den baggrund skal der skabes grundlag for en argumenterende grammatik. Med andre ord, der skal redegøres for, hvorfor den udviklede praksis og teori er årsagen til forbedringer, hvorfor resultaterne kan generaliseres samt for studiets troværdighed (jf. afsnit 4.5. "Et klasserums-designstudie"). Formålet med nærværende ph.d.-projekt er at formulere nogle didaktiske principper, der kan medvirke til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. I den forbindelse ses det at skabe rum for, at eleverne også får mulighed for at udvikle deres historiske bevidsthed, som et middel til at kvalificere elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med GeoGebra. Omdrejningspunktet for den retrospektive analyse af afprøvning 1 og 2 er FS3:

> Hvordan kan lærere og elever på mellemtrinnet arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på en måde, der understøtter, at elever kan udvikle deres matematiske ræsonnementskompetence?

Den retrospektive analyse af afprøvningerne tager udgangspunkt i en vurdering af det samlede sæt af indsamlet data. Der indgår kun data fra afprøvning 1 og 2 i nærværende retrospektive analyse. Det skyldes bl.a., at disse afprøvninger har fundet sted i klasser, der kan anses for at være repræsentative for en folkeskoleklasse på det pågældende alderstrin. Der er indsamlet et større datamateriale end det, der bliver repræsenteret i dette kapitel. De tre overordnede kriterier for vurdering og udvælgelse af data er: 1) Begge afprøvninger skal være repræsenteret i den respektive analyse, 2) Det udvalgte data skal repræsentere forskellige situationer fra de to afprøvninger, og analyserne heraf skal kunne understøtte formuleringen af de didaktiske principper samt 3) Det udvalgte data skal kunne analyseres med udgangspunkt i de fire teoretiske distinktioner, der undervejs i projektet er blevet mere og mere tydelige i forhold til at udgøre en planlægnings- og analyseramme.

De fire forskellige teoretiske distinktioner i analyserne: 1) Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Højgaard, 2002), 2) Dynamisk og statisk læsning (Mellin-Olsen, 1984), 3) Pragmatisk, retfærdiggørende og epistemisk mediering (Jankvist & Misfeldt, 2019; Misfeldt & Jankvist, 2018) samt 4) Regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984). Dertil kommer, at det Jensen (2011) kalder historisk bevidsthed også inddrages i de retrospektive analyser. Hver af analyserne baserer sig på en eller flere af de teoretiske distinktioner. Disse distinktioner er nærmere beskrevet i kapitel 3 “Teori”. I den retrospektive analyse bruges begreberne fra de fire ovenstående teoretiske distinktioner og historisk bevidsthed uden, at der er referencer på hver gang.

I begge afprøvninger var der indlagt forskellige opgaver, interviews og logbogssider, der bl.a. var tiltænkt at skulle give blik for mulige progressioner i forhold til elevernes udvikling af ræsonnementskompetencen. Det synes dog som, at der dels var så meget nyt i spil i afprøvningerne til det gav mening at fokusere på en progression og dels at disse opgaver måske alligevel ikke helt egnede sig til en egentlig analyse af en progression. Derfor er der ikke lagt et sådan blik ind som en del af den argumenterende grammatik.

Selvom tankegangskompetencen ikke som sådan er ekspliciteret i forhold til de teoretiske distinktioner analysearbejdet i dette kapitel omhandler, så er den en central del heraf alligevel. Det skyldes bl.a., at den er slået sammen med ræsonnementskompetencen i Fælles Mål, hvilket også er nærmere beskrevet i kapitel 3. Det har også vist sig undervejs i arbejdet med ph.d.-projektet, at der måske ligger en særlig mulighed i forhold til at arbejde med forholdet mellem tankegangs- og ræsonnementskompetencen, når der er fokus på arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra (Thomsen og Jankvist, in press).

I dette kapitel præsenteres analyser af to cases, én fra hver afprøvning. I case 1 er der udvalgt forskellige episoder og sekvenser, der viser vekslenen mellem at arbejde med en problemstilling fra Platons Menon i hhv. GeoGebra og skolegården med pind, snor og kridt som værktøjer samt opsamlingen herpå. Case 2 drejer sig om arbejdet med Euklids fem forudsætninger, Bog I og arbejdet med et uddrag af Euklids sætning 6, bog 4: *I en given Cirkel at indskrive et Kvadrat*.

De to cases består hver især af forskellige episoder, som yderligere er delt op i små sekvenser. Valget af episoder begrundes indledningsvist i hver case, derefter præsenteres og analyseres disse og hver case afsluttes med en opsamling, hvor særlige fokusområder fremhæves. I den afsluttende diskussion på hele kapitlet samles der op på nogle af de sammenhænge mellem de teoretiske distinktioner, der går på tværs af de to indslag.

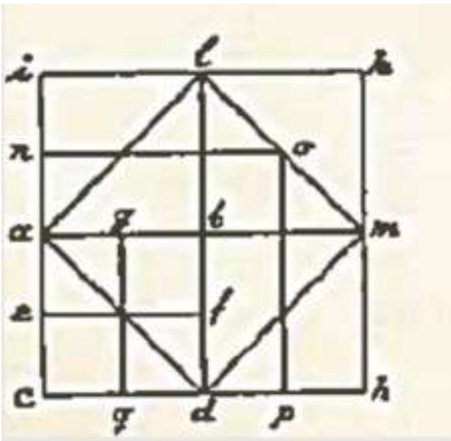
Undervejs i præsentationen af cases betegnes lærerne som L og eleverne som enten fx blot E eller E1, E2, E3 osv. E1 repræsenterer ikke den samme elev i de forskellige cases, men det kan på den anden side godt være tilfældet, at E1 er den samme elev i forskellige cases. Årsagen til, at eleverne ikke konsekvent følges med forskellige elevnumre, er dels, at det i nogle af klasse- og gruppedialogerne er svært at høre, hvilke elever, det er, der taler og dels, at det ikke hele vejen igennem afprøvningerne har været muligt at følge de samme grupper. Ærindet med indeværende retrospektive analyse er ikke at følge enkelte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, men at få blik for forskellige situationer, der kan danne grundlag for en formulering af mere generelle didaktiske principper, som kan medvirke til at understøtte udvikling af elevers ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. De steder, hvor det vurderes, at det spiller ind på analysen af casen, gøres der opmærksom på, hvis en elev også optræder i en anden case.

Generelt stræbes der efter en transparens i forhold til at beskrive de forskellige måder at præsentere data på undervejs. Derudover søges der også at triangulere data i de tilfælde, hvor det er muligt. Det gælder fx i forhold til at sammenholde elevers mundtlige og skriftlige arbejde i analyserne.

## 6.1. Case 1 – 1. afprøvning – 3 episoder

Den første case er fra afprøvning 1, hvor der arbejdedes med et uddrag (s. 32-41) af Rangel-Nielsens (1906) danske oversættelse af Platons Menon.

Hovedproblemstillingen, som teksten kredser om, er, hvordan et kvadrat, der er 2 fod på hvert led, altså med arealet 4, kan fordobles, så det bliver et kvadrat med arealet 8. Det er illustreret i figur 8.



*Figur 8: Illustration af den overordnede problemstilling i Platons Menon fra Rangel-Nielsens (1906, s. 33) oversættelse.*

Denne afprøvning strakte sig over fire undervisningssessioner. Klassen arbejdede med udgangspunkt i teksten de første to sessioner. I disse to sessioner introduceredes Sokrates' syn på læring og måde at stille spørgsmål på. Derudover arbejdedes med teksten og indholdet omkring problemstillingen. I den tredje session arbejdede eleverne i skolegården med problemstillingen, og der samles op herpå fælles i klassen. I den fjerde session arbejdede klassen dels med at afslutte arbejdet med teksten og dels med at arbejde med en anden opgave omkring at fordoble trekanters størrelse (jf. afsnit 4.6.2.).

Der indgår tre forskellige episoder i den første case:

1. Fælles læsning og dialog i klassen – Optakt til arbejdet med problemstillingen
2. Makkerpars arbejde med at løse problemstillingen i GeoGebra og i skolegården med en pind, snor og kridt.
3. Fælles opsamling på arbejdet i skolegården.

Episoderne præsenteres og begrundes undervejs i den retrospektive analyse af case 1.

### 6.1.1. Case 1 – Episode 1 – Det indledende arbejde med teksten og problemstillingen

Denne episode består af 5 forskellige små sekvenser. De giver et indblik i, hvordan der indledende blev arbejdet med at understøtte eleverne i at: 1) forstå problemstillingen, 2) præcisere deres fagsprogbrug i forhold til at kunne forstå problemstillingen og kunne argumentere for løsningsmuligheder heraf og 3) få mod på at indgå i et arbejde med at ræsonnere. Sekvens 1 er et eksempel på, hvordan læreren stopper op forskellige steder i teksten og inddrager eleverne i en besvarelse af de spørgsmål, Sokrates stiller. Sekvens 2 hænger sammen hermed og er et eksempel på, hvordan én gruppe arbejder med GeoGebra i den forbindelse. I sekvens 3 arbejder gruppen videre. De to sekvenser er bl.a. taget med, fordi de kan analyseres som overgange mellem de forskellige medieringsformer, og hvordan de knytter sig til elevernes brug af ræsonnementskompetencen. I sekvens 4 fokuseres der på, hvad det er for faglige begreber og sammenhænge, der er på spil i problemstillingen og i sekvens 5 taler de om selv at blive overbevist og overbevise andre.

*Sekvens 1*

Læreren læser højt af uddraget af Rangel-Nielsens (1906) oversættelse af Platons Menon. På den fælles skærm i klassen er der åbnet 1) et vindue med GeoGebra, hvori der er konstrueret et kvadrat med fire felter og 2) et vindue med teksten fra originalkilden.

I nedenstående dialog står L for lærerens udsagn, mens E, E1, E2 osv. er forskellige elevers udsagn.

L: At hvis man fordobler den ene side – eller hvad kan man sige, de to (pause – kigger på teksten) selvfølgelig over for hinanden, hvad sker der så med arealet. Og nu er det i gruppen (går hen til skærmbilledet af figuren i GeoGebra), at I skal prøve og trække jeres figur, så I hvordan jeg gjorde?

E: (Flere svarer) ja.

L: I hjørnerne, så den ene side bliver dobbelt så lang og så skal I snakke om, hvad sker der så med arealet? Prøv lige at snak om det i gruppen. Og ja I må godt tegne sådan en figur, og den behøver ikke at være lige så stor, I må godt tegne dem i mindre målestoksforhold.

E1: Ja, clardo!
L: Og hvad sker der så med arealet.
(Eleverne arbejder – kort tid ca. 1 minut)
L: Er der nogen grupper, som har fået snakket om, hvad der sker med arealet, når vi fordobler den ene side?
E2: Vi har snakket om, at det bliver lidt længere.
L: Bliver arealet længere?
E2: Arealet…(lidt tøvende). Vi snakkede bare om, at det blev til en rektangel i stedet for.
L: Ja, er der kun de to grupper, der har tænkt over, hvad der sker med arealet? Alle grupper er blevet bedt om at snakke om det. Hvad har I snakket om, at der sker med arealet?
E3: Vi snakkede bare om, at det blev større.
E4: Det bliver større.
L: Det bliver større i hvert fald. Har vi nogen ide om, hvor meget større?
E5 Dobbelt så stort.
L: Dobbelt så stort, er der nogen, der havde tænkt noget andet? Havde I også tænkt sådan? Havde du også tænkt sådan (spørger en elev) Og havde I også tænkt sådan.
E6: Ja.
L: Hvis så vi, og det var det sidste, jeg lige læste op, hvor det er, at han så forlænger den anden side også. Hvor E7 sagde, at så bliver arealet 8.
E7: Jeg har ikke sagt 8.
L: Du har ikke sagt 8. Jeg hørte ikke, hvad du sagde.
E7: 16.
L: Hvad sker der med arealet nu? Snak om det i gruppen.

Der er ikke mange elever, der i første omgang rækker hånden op og synes sikre i deres svar. Det kommer bl.a. til udtryk ved, at læreren spørger: "Ja, er der kun de to grupper, der har tænkt over, hvad der sker med arealet? Alle grupper er blevet bedt om at snakke om det. Hvad har I snakket om, at der sker med arealet?" Eleverne fik kun omkring 1 minut til at tale om det i grupperne i første omgang. Det kan være en af grundende til, at der i første omgang ikke er mange elever, som byder ind med et svar. Det kan også være, at eleverne er lidt usikre på opgaven, fordi den udspringer af højtlæsning af en tekst, der er svær, bl.a. fordi sproget og sætningskonstruktionerne er gammeldags. Undervejs i samtalen gentager læreren elevernes svar og bruger dem til at spørge videre ud i klassen med. Her er det også interessant, at læreren spørger ved fx at sige: "Har vi nogen ide om, hvor meget større?" "Har vi nogen ide", retter sig ikke mod, at eleverne skal give det eksakte svar, men kan komme med deres bud. Læreren inddrager også et elevbud. Eleven er ikke enig heri. Læreren gentager det eleven siger, hvilket afstedkommer, at eleven byder ind med sit svar. Det synes som om, at lærerens gentagelser af elevernes svar binder samtalen sammen og er med til at understøtte en præcisering af, hvad det er, der sker med arealet. Det synes også at understøtte en dynamisk læsning, hvor elevernes svar og udsagn inddrages undervejs i deres fælles læsning af teksten.

*Sekvens 2*

Den følgende transskriberede sekvens er fra en videooptagelse, hvor kameraet er placeret ved én gruppe. Nedenstående billeder af gruppens computerskærm er skærmbilleder fra videooptagelsen.

| Billede 1 | Billede 2 | Billede 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |

*Figur 9: Billeder af en gruppes computerskærm – Deres arbejde med at fordoble hver sidelængde.*

Den følgende samtale foregår mellem billede 2 og 3. Mens eleverne snakker videre i grupperne omkring spørgsmålet, læreren sluttede foregående sekvens med: "Hvad sker der med arealet nu?", er der også lidt snak mellem enkelte elever, grupper og læreren[24]. I dialogen står L fortsat for lærerens udsagn og her har eleverne i gruppen bogstaver, så deres udsagn præsenteres ved EA, EB og EC. Mens de øvrige elevers udsagn betegnes med E8 og E9 i den fælles samtale i klassen.

EA: Det bliver fordoblet igen, fordi man fordobler den ene side.
EB og EC: Jaah.
EA: Og så fordobler man den anden side og så bliver det fire gange så stort.
(EA og EB siger noget, jeg ikke kan høre – noget omkring selve opgaven, EB tager sig til hovedet).
L: (Siger til hele klassen ud fra en samtale med en elev fra en anden gruppe) I skal lige huske, at udgangspunktet var den lille firkant (viser det på den fælles GeoGebraskærm)
(En elev fra en anden gruppe siger, nåhh, 3 gange så stort, der er også grupper i baggrunden, der siger at det er 2 en halv gange så stort).
L: Snak om det i gruppen.
EC: En firkant.
EB: (Rækker hurtigt hånden op og siger) Vi ved det godt. Det er dobbelt så stort.
(De snakker videre i gruppen)
EA: Nej fire gange. Hvis det er sådan i forhold til den figur (peger på figuren, først med et direkte peg og derefter peger EA rundt – rundt om firkanten).
EC: Der er 4 felter (tæller felterne, billede 3).
(Herefter bliver det en fælles samtale i klassen)
L: Prøv lige at hør engang. Vi tager i forhold til den lille firkant, viser det igen på den fælles skærm. Hvad er der så sket med arealet, når vi har fordoblet siderne (spørger EA)?
EA: Den bliver 4 gange så stor (billede 3).
L: Så blev arealet 4 gange så stort. Er der nogle andre, der har tænkt noget andet (spørger en elev)?
E8: Næhh…
L: Nej, hvad snakkede i om i jeres gruppe?
E8: At det var fire gange så stort.
L: At det var fire gange så stort (spørger en anden elev).
E9: At det blev en kvadrat igen.

Brugen af GeoGebra kan for denne gruppe siges at understøtte en retfærdiggørende eller pragmatisk mediering, eftersom eleverne kan se, hvad der sker med arealet, når de ændrer på

[24] Desværre er det lidt svært at høre, hvad eleverne siger, så transskriberingen er så tæt på elevernes samtale, som det er muligt med den lydkvalitet, der er blevet optaget med.

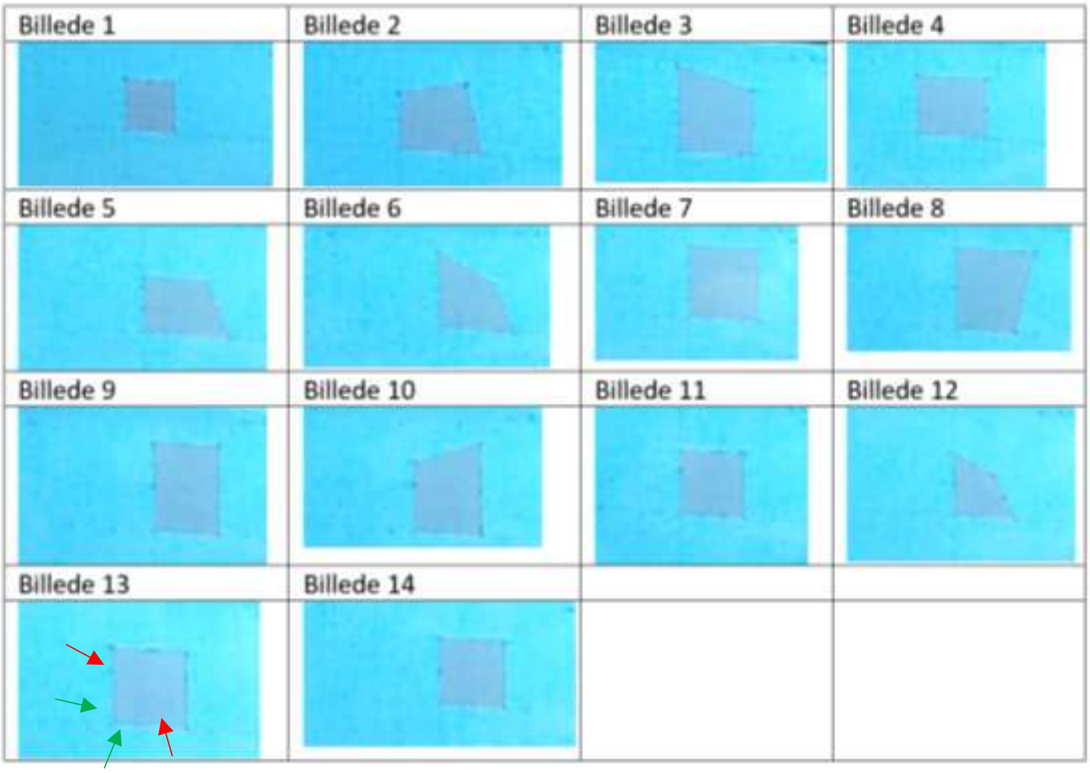
henholdsvis den ene og den anden sidelængde. EA siger, at figuren (billede 3) bliver 4 gange så stor og EC tæller derefter felterne i figuren for at understøtte, at de kan blive enige om at arealet er fire gange så stort. Umiddelbart synes EB i første omgang at sammenholde det nye areal (billede 3) til det fra den foregående opgave (billede 2). Her guider læreren gruppernes arbejde ved at sige: "Vi tager det i forhold til den lille firkant". Ved at vise det på den fælles skærm får læreren på den ene side skabt rum for, at eleverne kan arbejde selvstændigt videre. På den anden side når grupperne ikke selv at få talt om, hvilken firkant de kigger på arealet i forhold til. Selve opgaverne kan karakteriseres som to enkelte opgaver, der handler om at se en forandring af figurernes areal. I den opfølgende fælles samtale bliver eleverne hverken spurgt til, hvorfor det er sådan eller om det altid gælder. Derfor kan det heller ikke som sådan siges at være en epistemisk mediering på spil, ej heller et eksplicit ræsonnement, eftersom eleverne ikke italesætter dette, men koncentrerer sig om at finde og give et svar. På den baggrund kan det karakteriseres som om, der arbejdes ud fra en regelopfattelse i denne del af opgaven. Dog kan det nævnes, at det hælder til at kunne karakteriseres som et indledende arbejde ud fra et strukturopfattelsesperspektiv, eftersom eleverne veksler mellem at koble længderne af siderne til et areal samt til at skelne mellem rektangler og kvadrater. Lige såvel som, at denne sekvens skal ses i det samlede billede og umiddelbart er tænkt som at skulle lede op til arbejdet i næste sekvens.

*Sekvens 3*

Her læser læreren videre i Menon, sikrer sig, at eleverne er med i forhold til de udleverede tekststykker, de har fået. Efter at have læst de tekststykker, der samler op på det foregående i forhold til, at det i teksten også bliver slået fast, at figuren nu er fire gange så stor som startfiguren, læser læreren videre og siger:

> L: (…) Så siger Sokrates. Kunne der nu ikke være en anden figur? 2 gange så stor som denne, men af samme form. Med alle linjerne lige lange. Altså… Er der nogen, der forstår det? (Spørger en elev – en elev siger nej) … Prøv lige at lyt (læser igen op). Kunne der nu ikke være en anden figur? 2 gange så stor som denne – (læser ikke, men siger) – altså dobbelt så stor som denne her, som vi lige er blevet enige om var 4, men af en…øhm, men af en anden form med alle linjerne lige lange som denne. Det vil sige, at vi laver, I skal prøve nu at lave en ny figur, som er dobbelt så stor som denne her, men med samme form, hvor alle linjerne er lige, så lange som i denne.

Eleverne går i gang med arbejdet i grupperne. Kameraet er stadig placeret ved gruppen fra sekvens 2. I deres arbejde med denne opgave bruger de dragging. De hiver i forskellige af firkantens hjørner.




*Figur 10: Billeder af en gruppes computerskærm – Rækkefølgen i deres arbejde med at fordoble arealet.*

Det er lidt svært at høre, hvad eleverne i gruppen siger, og hvem der siger hvad. Derfor præsenteres denne samtale ikke i transskriberet form, men der gengives hovedelementer herfra og de sættes i forhold til billederne i figur 10. Umiddelbart taler de ikke sammen omkring billede 1, men i forhold til overgangen til billede 2 siger en af dem: "Hvis vi sætter den herover, er den i hvert fald større." I overgangen fra billede 2 til 3 taler de om, at den skal være 8 her, altså på den lodrette akse. Derefter hiver de i igen i øverste venstre hjørne af firkanten og sætter det ned, så det flugter med det venstre hjørnes placering i forhold til den lodrette akse (billede 4). Denne figur er større end den, de tog udgangspunkt i. Det italesættes også ved, at en fra gruppen siger: "Den var fire før". Mellem billede 5 og 7 kan jeg ikke høre, hvad de siger, og det går også hurtigt. Det synes som om, de går målrettet efter at konstruere figuren på billede 7.

Mellem billede 7 og 8 er der en elev fra en anden gruppe, der siger til læreren: "Det der forstod jeg ikke". Hvortil læreren svarer: "Det gør jeg næsten heller ikke selv". Herefter arbejder grupperne videre.

En elev fra gruppen siger "sådan der" og læner sig tilbage fra skærmen, som om at nu er opgaven løst. Men her siger en anden elev, "men linjerne hernede er ikke lige lange som den dernede" (her kan jeg ikke se, hvad de viser på skærmen). Den tredje elev påpeger, at den figur er fire gange så stor. Derefter fortsætter de og en af dem siger, "hvad nu hvis vi gør sådan og sådan", mens eleven hiver i figurens hjørner (billede 8 og 9) og sådan og sådan (billede 10 og 11). Ved billede 11 siger en af eleverne: "Sådan er den så ikke fire gange så stor?" (her har de trukket i linjerne, så de ca. halverer figuren mellem 4 og 8 på den vandrette akse og derefter gør på det samme på den lodrette akse. Så spørger eleven, som har hevet i hjørnerne "Er den så ikke?" En af de andre svarer: "Jeg tror bare, man skulle sætte den oven på den anden". Så siger eleven fra før, at den jo stadig skulle være et kvadrat, hvilket overbeviser dem. Så spørger den tredje elev: "Skulle den være dobbelt så stor eller hvad?". Hvortil de andre svarer: "ja", og nu tager den tredje elev fat i figuren og hiver i hjørnerne, så firkanten kommer til at se ud som på billede 12. En af de andre elever minder om, at det stadig skal være et kvadrat, hvortil eleven, der hiver i hjørnerne tilkendegiver at være klar over det, men gerne vil starte fra udgangspunktet igen. Ved billede 13 bliver de enige om, at lige nu er den 4. Derefter taler de om, at hvis den skal fordobles, skal sidelængderne måske være 6.

Her afbryder lærerne gruppernes arbejde og gentager opgaven og siger bl.a., at de skal lave en ny figur. Hvilket giver anledning til, at en af eleverne (fra den gruppe, der er omdrejningspunkt for denne sekvens) udbryder "En ny, så vi skal ikke trække den anden?" Hvortil læreren svarer, at: "Det må I også godt". Her kan man høre nogle elever fra andre grupper sige, at de stadig ikke forstår det. Gruppen, der bliver filmet, diskuterer videre. Den ene elev peger på nogle af linjerne med musen (desværre kan jeg ikke helt se hvilke, måske er det de to linjer med røde pile i forhold til de to linjer med grønne pile på billede 13 og så hiver de i stregerne inden i kvadratet, så det kommer til at se ud på som billede 14?) og siger, at de linjer er ikke ligeså lange som de andre linjer. Her siger en af de andre elever, at vedkommende tror, at det heller ikke er det, de skal kigge på, fordi der er hele arealet af figuren. Det diskuterer de lidt, og eleven, der har påpeget, at de forskellige linjestykker ikke er lige lange, tilkalder læreren og siger: "Altså man skulle gøre den dobbelt så stor og stadig have alle linjerne lige lange?". Her svarer læreren ikke (kan ikke se om læreren gestikulere eller er optaget af noget andet). Eleven fra før siger, at vedkommende er sikker på, at det, der menes, er, at den linje (hele linjen) skal være 6 cm, den anden skal være 6 cm osv. og afslutter med at sige: "Jeg tror, det er det, L mener med lige lange, ellers kan man ikke fordoble det". Den anden elev påpeger, at det ikke er sikkert for: "Han [Sokrates] spørger jo, om det er rigtigt, om man kan det, så svaret kan jo godt være nej. Han tester jo hans logik". De kalder på læreren, som ikke når hen til dem. I stedet samler de op i klassen. Her kommer det i starten til at gå op i, at de skal lime tekststykket ind i deres hæfte og så går de i gang med at runde timen af.

Selvom eleverne ikke finder frem til svaret på denne opgave, og de heller ikke vælger fx at bruge "måleknappen" i forhold til at finde arealet i GeoGebra, synes deres brug af GeoGebra at udgøre en epistemisk mediering. Eleverne bliver ved med at diskutere, om de har fundet et kvadrat med de rigtige sidelængder eller ej. De argumenterer hele tiden i forhold til det, de ser på skærmen, og den opgave læreren har givet dem med udgangspunkt i tekststykket. I slutningen vender de ydermere tilbage til teksten på et mere generelt niveau, til Sokrates' spørgsmål, og hvorfor han stillede det. På det tidspunkt har eleverne ikke fået svaret fra teksten, hvilket i høj grad kan ses som udtryk for en dynamisk læsning af teksten. Ydermere skaber denne situation rum for, at eleverne kan bruge deres produktive side af ræsonnements-kompetencen. Tillige bruger de den undersøgende side, når de lytter til hinandens argumenter og argumenterer videre herfra. Derudover synes de også at arbejde hen imod en struktur-opfattelse – forstået på den måde, at de bringer arealer og sidelængder i spil på forskellig vis. Selvom de ikke diskuterer, hvordan de finder frem til arealet, synes det at ligge implicit i deres diskussion omkring, at sidelængderne kan ses som at være delt op i to, og hvis de ikke er lige store kan antallet af firkanter inde i den store firkant ikke være udtryk for arealet. De får ikke sat spørgsmålstegn ved om sidelængden 6 cm er den rigtige.

*Sekvens 4*

Denne sekvens ligger ikke fuldstændig i forlængelse af den foregående, da den er et uddrag af deres samlede opsamling på dagen. Dette uddrag er valgt, fordi der her lægges op til en præci-sering af sprogbruget i forhold til, hvad der er hovedelementerne i "dagens arbejde". L står for lærer og E for forskellige elever.

L: Ja, det blev fordoblet snakkede vi lige om, men hvad var det, vi havde gjort større for at arealet blev fordoblet?
E: Omkredsen.
L: Ja og hvad gjorde vi større for at omkredsen blev større. … Kan I huske hvad det var, Sokrates snakkede om til at starte med (gestikulerer med hænderne)?
E: Kvadratet.
L: Jaah, det var egentligt meget mere banalt. Hvad var det allerførste vi snakkede om?
E: (meget ivrig) Figuren blev større.
L: Ja, men hvad på figuren?
E: Linjerne.
L: Ja og hvad kalder vi også linjerne? Hvad plejer vi at kalde dem i en firkant (fører hånden langs figurens sider)?
(…)
L: Ja, men i virkeligheden er det meget mere banalt. Det jeg leder efter.
E: Trekant.
L: Er der slet ikke nogen der ved, hvad man kalder sådan en (fører hånden op til en af siderne på figuren) på en firkant?
E: Linjen.
L: Hvem sagde noget.
E: Linjen.

L: Ja tak… Det, de snakker om, er, hvad sker der med arealet, når vi ændrer på siderne? Når vi ændrer på firkantens sider. Hvad sker der så med arealet? Ja…og det var altså. Det var et af målene at finde ud af, hvad er det egentligt, de snakker om. Og det kan I godt se. Det er ikke helt nemt, fordi de også snakker på et meget gammeldags sprog.

Derfor synes det også ekstra interessant, at en af eleverne svarer "omkredsen". Den er jo også i spil i forhold til sidelængder og areal. Måske skyldes svaret, at de i den pågældende elevs gruppe har talt om omkredsen, da de arbejdede med GeoGebra? Umiddelbart griber læreren ikke dette svar og spørger ikke mere ind til det. I stedet bliver det en lidt længere sekvens, hvor læreren søger, at eleverne skal svare "sider". Her kunne læreren måske med fordel selv have korrigeret og sagt, at de bliver kaldt sider i fx en firkant. Omvendt kan lærerens spørgsmål til eleverne også medvirke til at understøtte en præcisering af deres sprogbrug samt en forståelse af, at Sokrates på det tidspunkt spørger til sammenhængen mellem sidelængder og areal, når sidelængderne fordobles. Begge dele er vigtige i forhold til at arbejde med ræsonnements-kompetencen. Det gælder om at se "kerneproblemstillingen", dermed også komme tættere på de bærende ideer, og at arbejde med præciseringer, som er et skridt på vejen mod at arbejde med matematiske argumenter, ræsonnementer og bevisførelse (jf. afsnit 3.1.5.).

På et tidpunkt under sekvens 3 svarer læreren en elev, at læreren også synes, det kan være svært at forstå teksten. Uddraget af dialogen i klassen her under sekvens 4 slutter med, at læreren siger: "(…) Og det kan I godt se. Det er ikke helt nemt, fordi de også snakker på et meget gammeldags sprog". Kommentarer som disse giver i afprøvning 1 anledning til, at lærer og elever i fællesskab kan tale om, at det er svært at forstå teksten og ikke nødvendigvis bare sjovt. Lærerens italesættelse af sin egen tvivl omkring forståelsen af teksten synes yderligere at medvirke til at skabe et rum, hvor eleverne også får mulighed for at tilkendegive, når der er noget, de ikke forstår og at åbne for, at eleverne kan bringe deres egne forståelser på banen.

*Sekvens 5*

Sekvens 5 er ligeledes et uddrag af den fælles opsamling i klassen. Formålet ved denne del af opsamlingen var, at eleverne fik en forståelse for vigtigheden af: 1) at de selv skal formulere argumentationer og ræsonnementer, som kan overbevise andre og 2) at de selv lytter og kan argumentere mod og lade sig overbevise af andres argumenter. Det er dels inspireret af Harel & Sowders (2007) begreber *ascertaining* og *persuading* og dels et ønske om fremadrettet at understøtte at bringe elevernes undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen i spil. I det nedenstående uddrag får eleverne ikke selv sat så mange ord herpå, men det synes alligevel som om, læreren fik understøttet ovenstående.

L: Og så er et af målene, at I ud fra det, I har lavet i GeoGebra kan argumentere for og altså også ræsonnere og prøve at overbevise jer selv om, hvorfor jeres svar er rigtige. Øhhm, og man kan måske sige, at nogle gange, kan I huske, når I sidder og arbejder sammen to og to, at jeg sådan er lidt efter jer i forhold til, at det ikke bare er den ene, der sidder og laver det og får et forskelligt resultat (går hen til en af eleverne). Hvis nu E og jeg arbejder sammen og vi får et forskelligt resultat. Hvis resultat tror I så er rigtigt?

(Her kan jeg kan ikke helt høre, hvad eleverne siger)

L: Vores begge tos. Vi er i hvert nødt til at regne det ud igen. Bare fordi, jeg er læreren, så er det jo ikke sikkert, at det er mig, der har lavet det rigtigt.

(En elev siger noget omkring Sokrates' navn. Jeg kan ikke helt høre det)

L: Og så handler det også om, at I skal lade jer overbevise af andre, hvis de har en mere overbevisende argumentation end jer selv. Det vil sige, hvis nu det er, at E og jeg har siddet og arbejdet med en opgave, og vi har fået hvert sit resultat. Så skal vi også være klar til at sige: "Ok, det var dig, der lavede det rigtigt". Så er det så spørgsmålet om, er det altid den, der er mest overbevisende, der har ret? Det kan man jo også diskutere.

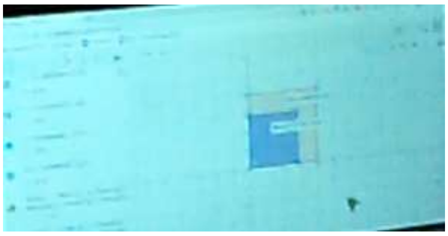
Læreren inddrager sig selv som en autoritet, man ikke blot ukritisk skal sætte sin lid til altid svarer rigtigt. Det kan danne grobund for, at eleverne ikke blot følger et eksternt overbevisningsskema og forhåbentligt kan det og det øvrige arbejde, der er gengivet i denne episode, også medvirke til, at eleverne ej heller blot ukritisk læner sig op ad den retfærdiggørende mediering, computeren kan udgøre. Det synes afgørende for, at den undersøgende side af ræsonnementskompetencen kan bringes i spil, forstået på den måde, at eleverne bliver gjort opmærksomme på, at de skal forsøge at forstå et matematisk argument, ræsonnement eller bevis og ikke blot lade sig overbevise, fordi den, som udfører det, virker overbevisende. En sådan tilgang synes også at kunne understøtte udviklingen af den produktive side af ræsonnementskompetencen, eftersom det understreges, hvor vigtige selve argumentationerne er. Selv om læreren ikke italesætter det, er en sekvens som ovenstående meget forskellig fra det, der foregår i selve den tekst, de tager udgangspunkt i. Her er der ikke tvivl om, at Sokrates er autoriteten, der gennem sine spørgsmål forventer bestemte svar. På sin vis kan man sige, at klassen kunne have arbejdet med teksten ud fra en statisk læsning og med udgangspunkt i at udvikle den undersøgende side af ræsonnementskompetencen. En sådan tilgang til arbejdet ville formentligt have tilskyndet til det Harel og Sowder (2007) kalder eksterne overbevisningsskemaer. Hvis GeoGebra udelukkende var blevet brugt til at forstå teksten, kunne der både forekomme en pragmatisk, epistemisk og retfærdiggørende mediering i forhold til de enkelte elever. Ud fra et læringsperspektiv ville man med en sådan tilgang kunne frygte, at eleverne i høj grad fik en forståelse for, at det ville være fint, hvis GeoGebra udgjorde en pragmatisk eller retfærdiggørende mediering. Ved at lade eleverne finde frem til deres egne svar, diskutere disse samt ydermere italesætte, at de skal lytte, argumentere, forholde sig til argumenterne og ikke blot ukritisk foranledige sig på en autoritet, understøtter læreren en dynamisk læsning samt danner grobund for, at eleverne kan se sig selv som diskussionspartnere, både med hinanden, men også med læreren. En sekvens som denne kan medvirke til at bidrage til at understøtte en historisk bevidsthed hos eleverne, hvor eleverne kan se sig selv som aktører i et nutidigt matematisk fællesskab, hvor lærerens udsagn, forklaringer og ræsonnementer ikke per se er dem, der skal følges.

### 6.1.2. Case 1 – Episode 2 – Løsning i GeoGebra og i skolegården

I denne episode analyseres 2 forskellige sekvenser, hvor 2 makkerpar arbejder med problemstillingen i henholdsvis GeoGebra og i skolegården med pind, snor og kridt. Én elev er med i dem begge. Denne elev skifter altså makker fra arbejdet i GeoGebra til arbejdet i skolegården. Alligevel synes det som, at eleven indirekte inddrager arbejdet med GeoGebra, når de er ude i skolegården. Iscenesættelsen af denne episode er, at klassen med udgangspunkt i teksten har haft en fælles diskussion om, hvor store kvadraternes areal bliver ved en sidelængde på henholdsvis 2, 3 og 4.  Læreren introducerer den følgende opgave ved bl.a. at konstatere, at de nu har "sneget" sig ind på, at sidelængden skal være mellem 2 og 3. Læreren beder eleverne om at åbne GeoGebra og tegne det kvadrat, de har på smartboardet. Her er sidelængden egentligt 4, og det er også opdelt i 4, men har et areal på 16 ifølge GeoGebras gitterlinjer.

*Sekvens 1*

Eleverne skal nu i deres grupper/makkerpar med udgangspunkt heri prøve at konstruere et kvadrat på 8. Casen består af en sekvens, der er filmet. Kameraet har ikke stået ved gruppen, derfor kendes dialogen før og efter sekvensen ikke. Makkerparret bliver spurgt, om de vil forklare, hvordan de har fundet frem til deres løsningsforslag[25].



*Figur 11: Skærmbillede – Makkerpars arbejde med areal i GeoGebra.*

Nedenfor er makkerparrets svar på, hvordan de fandt frem til deres løsning transskriberet fra filmklippet:

E1: Gangede arealet.

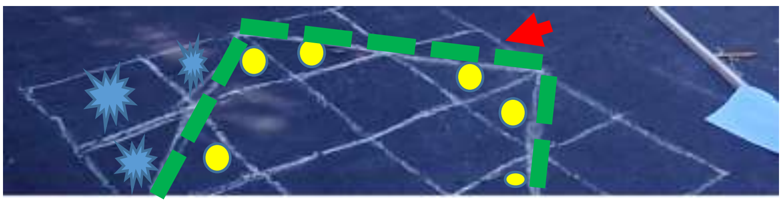
[25] Denne case er også brugt i Thomsen & Jankvist, 2021 i et paper, der blev præsenteret på ICME 14 i 2021. I dette paper bliver casen analyseret med udgangspunkt i ræsonnementskompetencen, medieringerne samt regel- og strukturopfattelse, hvorfor nedenstående analyse også er sammenlignelig med den i paperet. Paperet er ikke publiceret.

E2: Vi tog det regnestykke, der var tættest på at give 8, hvor man gangede det med sig selv – og det var så tre gange tre. Og så prøvede vi at tage det lidt længere ned. Og så fik vi arealet frem ved at trykke på noget deroppe. Og så prøvede vi at rykke på nogen af dem (peger på kanterne) og se, hvor tæt vi kunne komme – og så kom vi på 8,0. Og så prøvede vi at rykke en lille smule (tager fat med pilen i højre øverste hjørne) så er 8.01, det tætteste, vi har været på det.

Eleverne lægger ud med at benytte deres viden om, at man skal gange et kvadrats sidelængde med sig selv for at få arealet af et kvadrat. Det bruger de som udgangspunkt for dels at bruge dragging og dels arealmåleværktøjet i GeoGebra til at løse opgaven. De kommer så frem til, at et areal på 8.01 er det tætteste, de kan komme på det. I denne sekvens taler de ikke om længden af siderne på deres kvadrat. Umiddelbart kan det tolkes som, at man I starten får indtryk af, at GeoGebra udgør en epistemisk mediering, eftersom eleverne her synes at bygge et argument op. De tager udgangspunkt i deres viden om en regel om, at sidelængderne på et kvadrat skal ganges med sig selv for at få kvadratets areal. De går dog ikke her videre ind i, hvordan de kan finde sidernes længde, men bruger arealværktøjet i GeoGebra. Derfor kan det tolkes som, at GeoGebra i stedet kommer til at udgøre en pragmatisk og måske snarere retfærdiggørende mediering, når eleverne blot bruger måleværktøjet – og de synes at stille sig tilfreds med at nå til en figur på 8.01. Deres ræsonnementer knytter sig til brugen af GeoGebra, dels ud fra den visualisering eksemplet giver og dels ud fra de tal arealmåleværktøjet i GeoGebra giver. Af samme årsag kan det også tolkes som, at eleverne arbejder ud fra en regelopfattelse på dette tidspunkt, altså at de ved, at sidelængden i et kvadrat skal ganges med sig selv for at få arealet. Dette synes at ændre sig over mod en strukturopfattelse, når der arbejdes med problemstillingen i skolegården med pind, snor og kridt. Snor og pind har samme længde.

*Sekvens 2*

Anden sekvens af denne episode er et uddrag af en længere filmsekvens af et makkerpars arbejde, der er optaget i skolegården. Makkerparret starter med at tegne det store kvadrat. Derefter finder de midten og inddeler kvadratet i fire derudfra. Disse fire kvadraters sidelængder halverer de og forbinder med den tilsvarende halvering på kvadratet overfor. På den måde får de et kvadrat bestående af 16 kvadrater.



*Figur 12: Billede – Makkerpars arbejde med areal i skolegården. De indsatte farvelægninger understøtter forklaringen på elevernes ageren undervejs i deres dialog.*

Nedenstående er et uddrag fra makkerparrets samtale. Makkerparret bruger ofte deres fødder til at pege med eller gå rundt i figuren. Dette er illustreret med de indsatte farvede figurer på billedet, hvortil der henvises undervejs i uddraget af samtalen.

E2: Nu skal vi lave kvadratet 8 og så skal den ligge her et sted (viser med sin fod ca. der hvor den røde pil er).
E3: Man kan ikke lave en kvadrat på 8.
E2: Det kan man da godt. En, to (træder ind i to felter), og så et decimal (sætter igen en fiktiv streg med sin fod ca. ved den røde pil).
E3: Hvordan?
E2: Vi skal finde kvadratroden på 8 – eller af 8.
E3: Jeg ved ikke, hvad en kvadratrod er.
E2: Det er den, man skal gange med sig selv for, at det giver 8.

De tegner figuren lidt tydeligere op, mens de prøver at finde en løsning, men det lykkes ikke for dem. Der går et godt stykke tid, før de går ud af billedet (her følger kameraet dem ikke). De har muligvis været rundt at se, hvad nogle af de andre grupper har gjort, for da de kommer tilbage til deres egen figur, har de fundet en løsning, som de går i gang med at tegne.

E3: Ok, E2, så laver vi en firkant på den anden side. Vi laver en streg her og sætter den over til her og det samme her-her og det samme her-her og her-her (går den rute, de grønne stiplede linjer viser på figuren). Og så har vi…
E2: En firkant med arealet 8, men så er det på den anden led.
(tegner den op og småsludrer imens om andet)

Den videre dialog tager udgangspunkt i, at makkerparret bliver spurgt, om de vil prøve at forklare, hvorfor det kan være en god løsning.

E2: Fordi at to halve giver en … og så har vi …
E3: E2, hvorfor kan det her være en god ide?
E2: Vi har 8 halve og 4 hele.
E3: I starten så havde vi jo 16 og nu er vi nede på 8. Så fjernede vi jo halvdelen. Ved at fjerne halvdelen og få den til at være et kvadrat. Så fjernede vi (går rundt i alle "yder kvadraterne og trekanterne" – de blå stjerner illustrerer det på billedet) der, der, der, der…. Og så bliver det til et kvadrat bare på den anden led pga. vi er smarte.
E2: Det er fordi, vi har 8 halve og 4 hele (går også rundt i figuren – se de gule prikker) og 8 halve er 4 hele.
E3: Præcis, så fjerner vi 8.
(Kan ikke helt høre, hvad de siger)
E2: Det ville være sjovere at finde ud af, eller ikke sjovere, men det ville være sejere at finde ud af decimaltallet (tager igen sin fod hen til den røde pil)
E3: Det kunne også være rigtig sejt at finde decimaltallet, men nu har vi gjort det her, og det har vi det fint med.
(Kammeraet flyttes – uden at der spørges yderligere).

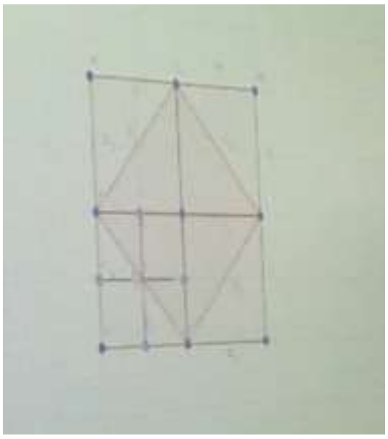
Elevernes argumenter viser, hvilke ræsonnementer, de selv gør sig omkring løsningsforslaget, og at de har en forståelse for ideen bag den løsning, de tegner. Det synes som om, at E2 fortsætter med at tænke i de baner, som E2 arbejdede sammen med en anden makker om i sekvens 1. Her arbejdede de ud fra ideen om, at det tætteste, de kunne finde, der ganget med sig selv gav 8 var 3x3. Derudfra konstruerede de et kvadrat, som de trak i og gjorde mindre til det passede med, at de fik et areal på 8.01. I sekvens 2 taler E2 om decimaltallet, både i starten og slutningen. Det synes umiddelbart ikke som om, at E2 knytter tanken om decimaltallet til længden på siderne af det nye kvadrat, de får tegnet inde i midten, eftersom E2 også i slutningen sætter foden ved den røde pil, altså mellem 2 og 3 på den ene sidelængde. Både E2 og E3 taler om, at det er på den anden led. Det kan tolkes som, at de er klar over, at sidelængden i kvadratet med diagonalerne som sidelængder, der svarer til sidelinjen mellem 2 og 3 i det store kvadrat, de startede med at tegne. Dermed kan det give det mest præcise svar på længden i forhold til de redskaber, de har til rådighed i denne konkrete situation i skolegården. Hvis det ses ud fra distinktionen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen, kan det fremhæves, at det synes som om, at eleverne her hovedsageligt bruger den undersøgende side af ræsonnementskompetencen, eftersom de formentligt bliver inspireret til en løsning ved at have gået rundt bl.a. de andre grupper. Samtidig giver eleverne to forskellige ræsonnementer: 1) De opgør, hvor stort arealet er i det nye kvadrat ved at lægge 8 halve og 4 hele sammen og 2) De tager, ligeledes ved at lægge hele og halve sammen, arealet af området uden for det nye kvadrat og trækker det fra 16, som de ud fra deres konstruktion af det store kvadrat vidste var 16. Det tyder på, de også gør brug af den produktive side af ræsonnementskompetencen.

Ud fra distinktionen mellem regel- og strukturopfattelse, inddrager eleverne flere forskellige regler og sætter dem sammen. De taler om, at de skal finde kvadratroden for at finde længden på kvadratets sider. De taler om hele og halve kvadrater samt om, hvordan de både kan finde arealet af det nye kvadrat ved at lægge dem sammen inde i kvadratet eller ved at lægge dem sammen uden for kvadratet og så trække dem fra det store kvadrat, der var deres udgangspunkt. Her arbejder de i høj grad ud fra en strukturopfattelse, som oven i købet har yderligere potentialer i forhold til at udvikle endnu flere strukturmuligheder, når E2 i slutningen vender tilbage til tanken om decimaltallet og taler om, det kunne være sejere at finde decimaltallet, viser E2 at være klar til at gå videre med den del. Til gengæld synes det også som om, at E3 tilkendegiver med sin afsluttende bemærkning ikke at være med på ideen. De er også ved at være trætte og tiden, de har til rådighed for denne opgave er også ved at rinde ud. I denne situation kan vi ikke direkte tale om, at der sker en form for mediering, mens eleverne arbejder med GeoGebra, eftersom de ikke bruger GeoGebra her. Som tidligere nævnt, synes det som om, E2 trækker på arbejdet med GeoGebra i forhold til ideen om at finde decimaltallet. Derfor kan man måske alligevel tolke det som, at GeoGebra bliver en epistemisk mediator – også her hvor GeoGebra ikke direkte bruges.

Her lå et oplagt potentiale i forhold til at inddrage dette i den fælles opsamling i klassen. Desværre får jeg ikke i situationen, om end jeg står bag kameraet, hørt ordentligt, hvad der bliver sagt, grebet denne mulighed, ej heller set potentialet i den og videregivet det, så læreren kunne inddrage det med at finde kvadratroden i den fælles opsamling i klassen.

### 6.1.3. Case 1 – Episode 3 - Fælles opsamling i klassen på smartboard

Episode 3 består af ét uddrag fra den fælles opsamlende dialog i klassen på baggrund af arbejdet med den opgave, de to første episoder også udspringer af[26]. Denne sekvens er en afslutning på den fælles opsummering. Før nedenstående uddrag har de med udgangspunkt i GeoGebra-konstruktionen (figur 13) bl.a. talt om, hvordan de kunne være sikre på, at kvadratet var dobbelt så stort og hvilke argumenter, der kunne bruges i denne forbindelse. L står for lærer og E står for forskellige elever.



*Figur 13: Billede – Figur til fælles opsamling.*

L: Inden vi går videre, så skal jeg lige høre engang. Nu har vi lavet det her, hvor vores udgangspunkt var en firkant eller et kvadrat, der var to på hver side, og arealet var 4 og det forlængede vi så. Vi lavede en firkant eller et kvadrat, der var fire gange så stort, for og kunne nå hen til sidst for at kunne lave et kvadrat, der var dobbelt så stort. Er I med på den? Vores udgangspunkt var den lille firkant, hvor vi gerne ville lave et kvadrat der var dobbelt så stort (peger på det i midten). Kan man gøre det her med en hvilken som helst firkant. Hvis nu jeg sagde til jer, nu skal I vise det her med en firkant, der fx er 5,5. Denne her, den er 2. Nu får I denne firkant, der er 5,5 på hver side. Nu vil jeg gerne have, I får lavet et kvadrat, der er dobbelt så stort. Og vi kender sådan set ikke…. Det er nemt nok at regne arealet ud af den der firkant, men det er jo ikke ligeså nemt med en firkant, der er 5,5. Er I med på den. Altså, hvis jeg sagde. Vi har en firkant eller et kvadrat. (tegner på tavlen). Hvordan ser så det kvadrat…

E: Den er 22.

L: Hvordan ser så det kvadrat ud, der er dobbelt så stort. Vil man kunne bruge det samme?

(…)

E: Det tror jeg godt, man kunne.

L: Det tror du godt, man kunne. Så hvis du skulle i gang med den opgave, så ville du gribe den an på samme måde, og det tænker du, det kunne godt gå? … Hvis man tænker, det tror jeg ikke, hvorfor tænker man så det (spørger en elev)?

E: Altså jeg tænker, det er muligt, hvis man ved, hvordan man kan dele arealet af 24.

[26] Denne episode har været en del af en præsentation til konferencen Nofa 8, hvor det også var denne case, der var i centrum. De uddrag, der blev præsenteret på denne konference blev hovedsageligt analyseret med udgagnspunkt i Mellin-Olsens begreb dynamisk læsning og ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002; Niss & Højgaard, 2019). Præsentationen på konferencen udsparng af et indsendt abstract til konferencen.

(lidt undren over 24, småtaler lidt om det)

L: Man er vel nødt til ligesom at have et eller andet, der er 5,5. Lad os nu sige, at vi havde en stok, der var 5, 5 meter… Ville vi så kunne løse opgaven?

(lidt snak om størrelsen)

E: Jeg tror det er muligt.

L: Du tror det er muligt. Hvad ville du gøre?

E: Det samme som vi lige har gjort.

L: Så ville du simpelthen gøre sådan. Man kan sige, hvis nu jeg lige gjorde sådan… Nu er der ikke længere mål på den der… Og jeg ved ikke helt med at hive i den… (prøver, men det lykkes ikke helt – elever kommer med ideer til, hvordan læreren kan gøre). Det er nok, fordi jeg har lavet hver enkelt figur. Nu er den ikke lige længere. Ok, hvis nu jeg havde lavet det som en stor figur fra starten af og jeg kunne have hevet i den.

E: Jeg tror godt, du kunne zoome.

L: Hvad tænker I så, er i enige med E i, at det kunne gribes an på samme måde?

(flere siger ja – og de stopper herefter).

Læreren stiller en generaliserende opgave ved at starte med at give et eksempel på et større kvadrat med en specifik sidelængde. Selvom de tidligere i samtalen har talt om forhold mellem sidelængder og vinkler i figuren, synes den første elev at svare ved at bruge tallet 22. Et tal der synes at knytte sig til sidelængden, enten det eleven tror 5,5x5,5 giver eller måske svarer eleven her med omkredsen? Her kan man sige, at eleven arbejder ud fra en regelforståelse og ikke bruger de mulige strukturudvidelser, de lige har været omkring i den foregående samtale. I den foregående del af samtalen har de talt ud fra et statisk billede af figuren i GeoGebra, men vel at mærke uden længdeangivelser. Læreren spørger så eksplicit til, om en elev ville gribe den an på samme måde. Her er det svært at vurdere, om eleven, der svarer, refererer til den foregående elevs svar eller den måde, de har løst det på i GeoGebra, fordi eleven igen svarer med, hvordan man kan dele arealet af et eksakt tal, nærmere bestemt af 24. På den baggrund kan det vurderes, at eleverne fortsat bliver i tvivl om løsningen af problemstillingen, enten fordi tallene ikke er lige til at “regne ud i hovedet”, eller fordi eleven er i tvivl om, hvordan arealet af et kvadrat regnes ud. Læreren spørger ikke til, hvordan eleven er kommet frem til løsningen. I stedet forsøger læreren at guide eleverne videre ved at sige, at man skulle have en pind, der var 5,5 lang for at løse opgaven. Derefter er der en elev, der siger, at eleven ville gøre det samme, som de lige har gjort. Læreren forsøger nu yderligere at understøtte dette svar med at bruge dragging i GeoGebra for at visualisere, at det er muligt at trække i figurens sidelængder og få det hele til at følge med. Det lykkes ikke, men den elev, der svarer, at læreren kan zoome i stedet for, synes at vise forståelse herfor. Det gik de ikke yderligere ind i, eftersom det jo ville kunne diskuteres om det var tilfældet eller ej. De prøver ikke at opstille nogle skriftlige beviser omkring forholdet mellem sidelængder og vinkler i figuren. Ligesåvel som de heller ikke inddrager måleværktøjerne i GeoGebra i denne opsamling. Det er også værd at fremhæve, at der er meget, som synes usagt i denne sekvens, forstået på den måde, at man umiddelbart får indtryk af, at eleverne deltager og forholder sig til spørgsmålene, hvilket de gør, men i og med de ikke får sat ord på, hvordan de kommer frem til deres resultater, kan det være svært at vurdere deres brug af ræsonnementskompetencen. Generelt kan man i forhold til denne opsamling sige, at det synes som om GeoGebra har udgjort en pragmatisk mediering for nogle elever og er på vej mod at udgøre en epistemisk for andre. Potentialet i at arbejde videre hermed synes i hvert fald at være til stede. Samtidig kan denne sekvens tolkes som, at der lå et potentiale for, at de i klassen kunne diskutere elevernes nutidige muligheder for at bruge måleredskaber, der gør det muligt at løse opgaven udelukkende ved brug af tal eller ved at løse opgaven, som de gjorde i skolegården (fx episode 2 sekvens 1). Det kunne yderligere have bidraget til at understøtte en historisk bevidsthed hos eleverne. Således at de så sig selv som elever, der har et redskab som GeoGebra til rådighed og på den baggrund kan veksle mellem forskellige løsningsmuligheder, hvilket redskaber som pind og snor ikke i sig selv giver anledning til.

### 6.1.4. Opsamling på case 1

I dette afsnit gives først en mere generel opsamling på casen i forhold til de udvalgte teoretiske distinktioner. Derefter præsenteres nogle af fundene i punktform i forhold til det videre arbejde med at formulere didaktiske principper. Afslutningsvist gives eksempler på, hvordan der muligvis kunne have været taget andre didaktiske tiltag i brug, hvis det på baggrund af nærværende retrospektive analyse var muligt at gennemføre endnu en iteration.

Originalkilden, der er udgangspunkt for case 1, adskiller sig fra den, der var omdrejningspunktet for afprøvning 2 og 0. Platons Menon har i nogen grad en anden tilgang til argumentation og ræsonnement end *Euklids Elementer*. I Menon bliver der hele tiden stillet spørgsmål, om end disse synes meget ledende og fremstår som en længere argumentationsrække, hvor rækkefølgen, hvormed spørgsmålene og dermed svarerne kommer på, minder om en deduktiv bevisførelse. Det ene spørgsmål leder logisk hen til det næste og vise versa. Derudover adskiller denne case sig også fra de to andre ved, at eleverne både arbejder med teksten både i samspil med GeoGebra og også i skolegården med pind, snor og kridt. Hermed arbejder eleverne dels med andre redskaber end GeoGebra og dels bruger de også kroppen i deres arbejde med problemstillingen. Sidstnævnte vil jeg ikke gå yderligere ind i udover at pointere, at det ser ud som om, eleverne i episode 2, sekvens 2, er helt komfortable med at gå rundt i figuren, både mens de arbejder og når de forklarer, hvordan de er nået frem til deres løsning. Denne veksling mellem at arbejde med GeoGebra og pind og snor synes at indeholde potentiale til at kvalificere elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Umiddelbart synes denne case hovedsageligt at understøtte en dynamisk læsning af teksten og muligheder for, at GeoGebra kan udgøre en pragmatisk og epistemisk mediering, hvilket medvirker til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle både deres undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Dertil kommer, at der synes at være grobund for yderligere at kunne have udnyttet potentialet i at arbejde mere systematisk med at understøtte en udvikling af en strukturopfattelse hos eleverne. Det samme gør sig gældende i forhold til at skabe muligheder for at understøtte elevernes muligheder for at udvikle en historisk bevidsthed

På baggrund af analyserne af case 1 synes det at understøtte mulighederne for at anlægge en dynamisk tilgang til læsning af hhv. originalkilde og GeoGebra, når:

- læreren læser op og skaber fælles dialog ved bl.a. at spørge undrende, gentage elevernes svar og spørge videre herfra i forhold til forståelsen af teksten. Konkrete eksempler fra casen er, når læreren siger: "Det bliver større i hvert fald. Har vi nogen ide om, hvor meget større?", "Hvis man tænker, det tror jeg ikke, hvorfor tænker man så det?" og "Du tror det er muligt. Hvad ville du gøre?"
- læreren giver sin egen tvivl tilkende og anerkender, at det er okay at synes, det er svært.

Det synes som, der lå et særligt potentiale i at understøtte, 1) at GeoGebra kan have en henholdsvis pragmatisk og epistemisk medierende funktion samt 2) at eleverne får mulighed for at udvikle både deres undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen når:

- teksten bruges som afsæt til, at eleverne løser delopgaver i mindre grupper i GeoGebra.
- eleverne også arbejder med problemstillingen med andre redskaber, fx pind, snor og kridt i skolegården.
- læreren gentagende gange eksplicit fortæller, at det handler om at argumentere og ræsonnere samt eksemplificerer det.
- læreren går ind i hhv. Sokratiske og mere åbne dialoger med eleverne omkring de bærende ideer og de matematiske sammenhænge i problemstillingerne og løsningsforslagene, argumentationerne heromkring. Det gælder både i introduktionen til en opgave, undervejs i elevernes opgaveløsning og som opsamling herpå.

Det synes som om skiftene mellem at arbejde med problemstillingen i hhv. GeoGebra i grupper, på tavlen, i skolegården og i GeoGebra i fællesskab havde potentiale til en mere bevidst brug af begreberne regel- og strukturopfattelse. Særligt kunne vi have arbejdet mere fokuseret på at indsnævre og udvide mulighederne for at få blik for strukturnettet i forhold til at udnytte mulighederne, brugen af de forskellige redskaber lagde op til. I de episoder, der er præsenteret i denne case, har der været arbejdet med:

- kvadrater som en firkant med lige lange sider og rette vinkler
- arealet findes ved at gange længde gange bredde (her kalder de det hhv. linjer og sidelængder)
- forholdet mellem areal og sidelængder, når man fordobler hhv. den ene og den anden sidelængde – kvadrater og rektangler
- halvering af areal af et kvadrat ved hjælp af diagonalen
- lægge halve og hele kvadrater sammen og trække dem fra
- fod, som udtryk for en enhed
- bruge arealmåleenheden i GeoGebra
- man kan finde sidelængden på et kvadrat ved at finde kvadratroden af arealet

Det var ikke alle grupper, der arbejdede med det hele, og der blev ikke systematisk arbejdet med at skabe sammenhænge mellem disse forskellige matematiske delelementer. Da der blev samlet op i fællesskab i klassen, efter de havde været ude i skolegården, talte de også om vinklerne i trekanterne i figuren. Her kunne de have brugt vinkelmålerværktøjet i GeoGebra og set, hvad der skete med vinklerne, når de trak i figuren. Ligesom de kunne have skrevet nogle af deres argumentationer ned på tavlen evt. med udgangspunkt i punkter og linjestykker på figuren. Som tidligere nævnt kunne de med udgangspunkt i gruppen fra episode 2 fx have arbejdet med at finde den eksakte sidelængde i det kvadrat, der var dobbelt så stort, hvilket GeoGebra ville have været velegnet til. Generelt var der i afprøvningen flere steder, hvor der blev arbejdet med at skabe grobund for, at eleverne kunne udvikle en historisk bevidsthed, der kunne ses som middel til at understøtte elevernes udvikling af deres ræsonnementskompetence, når de har redskaber som GeoGebra til rådighed. Det kunne yderligere have været kvalificeret, hvis der havde været lagt vægt på eksplicit at italesætte det. Det er fx fremhævet i episode 1 sekvens 5. Det kunne have været gjort på samme måde som i episode 3 ved en aktiv i talesætte af, at der er forskelle i måderne, vi i dag kan løse problemstillingen i forhold til dengang teksten blev til.

## 6.2. Case 2 – 2. afprøvning – 3 episoder

Case 2 knytter sig til afprøvning 2, hvor der blev arbejdet med Euklids fem forudsætninger, bog I og Euklids sætning 6, bog IV. Der er ligeledes udvalgt tre episoder fra afprøvning 2 til en nærmere retrospektiv analyse:

1. Klassens arbejde med de fem forudsætninger.

2. Forskellige makkerpars arbejde tekststykket fra sætning 6, bog IV: “Jeg siger saa, at den også er retvinklet. Thi da denne rette Linje BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en halvcirkel, altsaa er [vinkeltegn] BAD ret” (Eibe, 1897b, s. 73).
3. Den fælles opsamling på elevernes arbejde med tekststykket under episode 2 samt deres skriftlige besvarelser herpå.

De tre episoder introduceres og begrundes under hvert deres respektive afsnit. Det er forskelligt, hvilke af de fire teoretiske distinktioner, der hovedsageligt inddrages i analyserne i hhv. episode 1, 2 og 3. Fælles for case 2 er, at der i den afsluttende opsamling gives en analyse af, hvordan betegnelsen historisk bevidsthed kan ses i forhold til case 2.

### 6.2.1. Case 2 – Episode 1 - Forudsætningerne

Arbejdet med forudsætningerne blev først igangsat anden undervisningsgang, altså efter en dobbeltlektion, hvor klassen tidligere havde arbejdet med en intro forløbet (jf. afsnit 4.6.3.). I afprøvning 2 arbejdede eleverne selv med forudsætningerne i GeoGebra, før der var en fælles opsamling herpå i klassen. Klassens arbejde med forudsætningerne er valgt, fordi det kan medvirke til at give eleverne et indblik i den euklidiske geometri. Arbejdet med forudsætningerne bliver hovedsageligt analyseret med udgangspunkt i distinktionen mellem statisk og dynamisk læsning, fordi det ses som indgangen til, hvordan der i starten af forløbet lægges op til, at eleverne skal arbejde med en originalkilde. Derudover inddrages analyser af, hvordan tankegangskompetencen indgår i disse sekvenser med henblik på at understøtte en udvikling af elevernes ræsonnementskompetence. Det skyldes, at arbejdet med forudsætningerne ikke i sig selv er knyttet til ræsonnementskompetencen, men kan ses som grundlaget for elevernes videre arbejde hermed i forbindelse med deres arbejde med samspillet mellem en af Euklids sætninger og GeoGebra. Episode 1 består af 4 sekvenser: 1) Fælles intro til arbejdet med forudsætningerne, 2) Elevernes understregninger af svære ord i forudsætningerne, 3) Et makkerpars arbejde med 2. forudsætning og 4) Den fælles opsamling i klassen på forudsætning 2. Disse sekvenser er udvalgt, fordi de giver forskellige indblik i arbejdet med forudsætningerne og samlet giver de et billede af, hvordan arbejdet i sin helhed blev grebet an.

*Sekvens 1 – Introduktionen til arbejdet med forudsætningerne*

Selve arbejdet med forudsætningerne starter med, at læreren læser de fem forudsætninger (som står på smartboardet) op og siger derefter:

L: Jeg kommer ikke til at forklare det, fordi det er ligesom jer, der skal gå i gang med at prøve, lige om lidt, at lave en opgave, hvor I skal sidde og snakke om det her. Som vi også snakkede om i går, så handler noget af det … I skal øve os på her, er ikke bare lige at kunne se svaret, men at prøve at læse de her ting og snakke om, hvad de betyder, og så prøve… (en elev vil gerne spørge om noget). Du skal ikke spørge om, hvad det betyder…

E: Nej, nej, jeg tror, der er en stavefejl i første linje, der står der l.i.n.i.e (udpensler det). Er det meningen, der skal stå linje?

(Giver anledning til kort snak om, at stavemåder ændres gennem tiden)

Det kan tolkes som en dynamisk læsning, at eleven spørger til en mulig stavefejl. Eleven spørger ind til det og tager ikke bare tekstens tegn for pålydende, når det synes som om, der er en fejl. I første omgang går opgaven dog ikke som sådan ud på, at eleverne skal arbejde med og gå i dialog med det matematiske indhold, men på at eleverne forstår tekstens ordlyd, således at de efterfølgende kan efterprøve og arbejde med en yderligere forståelse af det matematiske indhold ved at bruge GeoGebra. Det kommer bl.a. til udtryk, når læreren siger: "Som vi også snakkede om i går, så handler noget at det, I skal øve os på her, er ikke bare lige at kunne se svaret, men at prøve at læse de her ting og snakke om, hvad de betyder, og så prøve…" Ydermere synes det at fremstå tydeligt, når læreren siger til en elev, at vedkommende ikke skal spørge, hvad det betyder.

*Sekvens 2 – Elevernes understregning af svære ord i forudsætningerne*

Herefter får eleverne udleveret et ark med de fem forudsætninger og læreren pointerer, at det til at starte med ikke handler om, at de forstår meningen med selve indholdet, men om de forstår ordene. Hvis der er ord, de ikke forstår, skal de sætte en streg under de steder i teksten og så taler de efterfølgende i fællesskab om betydningen af ordene. Her åbner læreren for, at eleverne selv får mulighed for at starte en dynamisk læsning, at gå i dialog med teksten. Eleverne arbejder i makkerpar om denne opgave (hver elev har afleveret deres ark, dvs. der er modtaget 20 besvarelser – 2 elever var fraværende den dag). På baggrund af elevernes svarark er der opstillet følgende kategoriseringer:

| Kategorisering | Besvarelser | Antal i alt |
|---|---|---|
| Ingen understregning og tegninger | | 5 |
| Ingen understregning, men med egne tegninger der illustrerer indholdet | På 2 af besvarelserne, er der tegninger til alle fem forudsætninger og på én er der en tegning til 5. forudsætning | 3 |
| Understregninger af ord eller sætninger samt ring om sætninger | Stavemåder: "ere, eet, naar, paa …" (4)<br>Ord og sætninger, eksempler:<br>Forudsætning 5: "At, naar en ret Linie skærer to rette Linier". (2)<br>Forudsætning 5: "Indvendige" og "ubegrænset" (1)<br>Forudsætning 5: "indvendige Vinkler" og "forlænges ubegrænset". (1) | 11 |

| | | |
|---|---|---|
| | Forudsætning 5: “Indvendige” (1)<br>Forudsætning 5: “Side ere mindre end to rette, saa” (1)<br>Forudsætning 5: Ring fra efter det første komma. Derudover er der også streg under indvendige Vinkler (1) | |
| Understregninger + egne tegninger | Begrænset er understreget og der er tegninger til forudsætning 2, 3, 4, og 5 | 1 |

*Figur 14: Skema – Skema over elevernes understregninger i Euklids fem forudsætninger, bog I.*

På 8 af svararkene er der ingen understregninger, men på de tre af dem er der til gengæld nogle illustrationer, som ser ud som om, de er forklaringer på de forskellige forudsætninger. Ét af disse svarark har kun én illustration, og den er knyttet til forudsætning 5. Disse svar kan man tolke, som værende udtryk for en dynamisk læsning. På trods af, at det ikke er hensigten, forsøger eleverne at lægge deres egen forståelse af det matematiske indhold ind i læsningen af forudsætningerne. En elev har understreget “ere” i forudsætning 4 og tegnet en tegning, der ikke handler om forudsætningerne, men hvorpå der står “No problema”. Det kan tolkes, som eleven har taget aktivt stilling til sit arbejde med understregninger af svære ord i forudsætningerne. Generelt er der ikke mange overstregninger i elevernes tekster, og de går enten på stavemåder, enkelte ord eller matematiske begreber. Kun fire af disse besvarelser har understreget en sætning eller et længere tekststykke. Elevernes understregninger er knyttet til forudsætning 5, Parallelaksiomet. Understregningerne omhandler bl.a: 1) en linje, der skærer to rette, 2) indvendige vinkler samt 3) at forlænge ubegrænset. Læreren samler kort op på disse fælles i klassen. Formålet med denne øvelse er yderligere at understøtte, elevernes mulighed for at arbejde selvstændigt, i makkerpar, med indholdet af forudsætningerne for at minimere, at der kommer sproglige benspænd på tværs heraf.

*Sekvens 3 – Et makkerpars arbejde med forudsætning 2*

Eleverne arbejder i makkerpar med de fem forudsætninger i GeoGebra. Denne del af arbejdet optager eleverne som screencast. På trods af, at læreren i introduktionen til opgaven (sekvens 1) tydeligør, at det handler om, at eleverne skal læse teksten, tale om betydningen heraf og prøve sig frem, gengiver flere af grupperne blot deres forståelse af de enkelte forudsætninger i GeoGebra. Måske er det et tegn på, at eleverne synes, det er sværere end som så bare at optage deres samtale. Selve screencastene kan med andre ord snarere ses som et udtryk for et “færdigt produkt”, et forsøg på at give et resultat fra elevernes side. Det kan også tolkes som, at eleverne måske er vant til at arbejde med at finde og præsentere resultater i matematikundervisningen. Den følgende dialog adskiller sig fra det ovenstående ved, at læreren stiller spørgsmål til eleverne undervejs i den. E1 viser en begrænset linje på skærmen og læreren spørger, om eleven kan forlænge den. E1 forlænger linjen ud fra slutpunktet til en linje med et nyt slutpunkt, således at det foregående slutpunkt bliver startpunktet i forlængelsen af linjen. Læreren spørger, om det er en ret linje. E1 svarer i første omgang nej og kigger på skærmen og siger, at den virker lidt skæv. Her bruger eleverne bl.a. gitteret i GeoGebra til at se, om det er en ret linje. Læreren forsøger at guide lidt. Det ender med, at E1 med "flyt"-ikonet tager fast i det yderste punkt på linjen og hiver i det.

L: (…) hvad er det, du gør der med linjen?
E1: Jeg trækker den længere ud (viser det også ved sit kropssprog, med armen).
(…) (Elev 1 er stadig ikke helt overbevist, men de ender med at tage det sidste linjestykke og forlænge det).
L: Hvor langt kan du forlænge den der?
E1: (Zoomer på livet løs)
L: Kan du forlænge den til, du ikke gider mere? Eller kan du … (elev 1 zoomer videre). Hvis jeg nu siger til dig, at det der kan du gøre til matematiktimen er slut, hvor langt kan du så forlænge den?
E1: (Kigger op) Jeg kan ikke forlænge den mere.
L: Hvad, nå er vi der, okay – men, ellers hvor langt kan man så forlænge en ret linje?
E1: I det uendelige.
L: Ja, og måske er det … hvor er begrænsningerne lige nu, er det fordi man ikke kan lave en ret linje længere eller er det fordi computeren ikke kan administrere det?
E1: Computeren.
L: Ja (går videre til næste gruppe).

Eleverne går meget konkret til værks. De bruger i høj grad GeoGebras visualiseringsmuligheder til at arbejde med at få en forståelse for forudsætning 2. Det kommer dels til udtryk ved, at E1 har svært ved at lade sig overbevise, fordi billedet viser noget andet og dels ved den meget ihærdige zoomen, indtil det ikke er muligt at forlænge en given linje længere i GeoGebra. Umiddelbart synes det som om, lærerne spørger til en mere abstrakt forståelse af at forlænge et linjestykke ud i et og som, at E1 godt forstår lærerens intentioner. E1 kunne blot svare: "I det uendelige" – uden at afprøve det yderligere i GeoGebra, men E1 vil tilsyneladende gerne afprøve det i GeoGebra, vil gerne selv have "syn for sagn". På den baggrund kan det tolkes som elevernes dynamiske læsning af hhv. originalkilden og GeoGebra. I eksemplet er tankegangskompetencen i spil i forhold til, at eleverne får en forståelse af både at kunne forlænge en linje ud i det uendelige inden for euklidisk geometri samt i de muligheder og begrænsninger, GeoGebra tilbyder i den forbindelse. Det synes også som, at både den undersøgende og produktive side af tankegangskompetencen er i spil. Den undersøgende side synes aktiveret, eftersom makkerparret forsøger at forstå og følge rækkeviden og begrænsningerne i de begreber og sammensætninger heraf, der præsenteres i Euklids forudsætning 2, altså "en begrænset ret linje" og "forlænge ud i et". De skaber også yderligere en forståelse af, hvordan de kan forstås med udgangspunkt i et GeoGebra-perspektiv. Læreren understøtter elevernes udvikling af den produktive side af tankegangskompetencen ved at spørge: "Ja, og måske er det … hvor er begrænsningerne lige nu, er det, fordi man ikke kan lave en ret linje længere, eller er det, fordi computeren ikke kan administrere det?". Det er læreren, der formulerer spørgsmålet, men det er afstedkommet af elevernes arbejde i GeoGebra. Der er ikke mange af grupperne, der umiddelbart synes at nå frem til en diskussion af, om computeren har en begrænsning eller ej i forhold til at vise "udi et". Til gengæld bliver det taget op i den fælles opsamling i klassen.

*Sekvens 4 – Fælles opsamling i klassen*

Den fælles opsamling på forudsætningerne finder sted tredje undervisningsgang, altså gangen efter eleverne har siddet og arbejdet med det i makkerpar. Før den fælles samtale om forudsætningerne, har de talt om målene, om at øve sig i at ræsonnere og argumentere matematisk, og hvad det betyder. Derudover har makkerparrene også set deres screencast fra gangen før igennem, så de kan bruge den i den fælles opsamling. I den fælles opsamling stiller læreren spørgsmål, eleverne svarer og dirigerer, hvordan læreren skal gøre i GeoGebra. I uddraget tales om uendelighed i forhold til forudsætning 2:

E1: At man kan forlænge en begrænset ret linje udi et.
L: Hvad betyder det?
E1: At hvis du har en linje som den nederste (de tager udgangspunkt i den linje, de har tegnet i GeoGebra i forbindelse med forudsætning 1), at man så bare kan lave den så lang, man vil.
L: Så man kan lave den så lang man vil. Hvordan gør man det?
E1: Ja, sådan ud i et.
L: Hvad betyder det, udi et?
E1: Uendelig
L: Så hvis jeg nu skulle prøve at vise det heroppe. Hvordan kan jeg så gøre det?
E1: Du kan bare trække i et af punkterne
L: Trække i et af punkterne (gør det og trækker linjen ud til "kanten af skærmen"). Ja, nu kan vi ikke gøre det her, men jeg kunne jo godt zoome ind, eller zoome ud hedder det vel nærmest (zoomer ud og tager fat i linjestykket igen og trækker i det). Så den her, påstår du så, kan man hive i til det uendelige?
E1: Ehm
L: Er der nogle, der er uenige med det?
E2: Det kan jo godt være, fx, at papiret på et eller andet tidspunkt stopper.
L: Ja. Så kan vi sige, at der er nogle fysiske begrænsninger. Kan vi kalde det andet teoretisk?
E2: Det kan man godt.
L: Det kan man godt.
E3: (en af de elever fra makkerparret i sekvens 3) Programmet stopper også på et tidspunkt. Vi kan heller ikke blive ved med at gøre det inde i programmet.
L: Nej, det er rigtigt, der er GeoGebra også, jeg kan ikke helt huske, var det jer der sad og prøvede at zoom ud?
E3: Ja det var os, der endte med at … (kan ikke helt høre det på optagelsen)
L: På et eller andet tidspunkt kan programmet ikke zoome ud længere, der stopper programmets papir, kan man sige.

Uendelighedsbegrebet er i fokus i forhold til at kunne forlænge en begrænset ret linje udi et. Det kan tolkes som, at eleverne bruger den produktive side af deres tankegangskompetence, når de fremhæver, at både brug af papir og blyant samt GeoGebra har begrænsninger i den forbindelse. I GeoGebra fik de måske yderligere en fornemmelse af, at man også rent praktisk kan forlænge en linje i det uendelige ved hjælp af zoomfunktionen – også selvom det alligevel viste sig, at det ikke var muligt. Her er det den undersøgende side af tankegangskompetencen, der er i spil. På baggrund af samtalen med eleverne italesætter læreren også, at man, selvom programmet har nogle begrænsninger, i teorien kan forlænge linjen i det uendelige. En bevidsthed om en skelnen mellem praksis og teori kan siges at skabe en yderligere bro til, når eleverne skal arbejde med eksempler og mere generelle ræsonnementer. Kendskab til programmets muligheder og begrænsninger samt kendskab til distinktionen mellem eksemplet og teorien kan også være en vigtig del i forhold til at understøtte elevernes mulighed for at kunne arbejde mere bevidsthed med, at GeoGebra kan udgøre en pragmatisk og/eller epistemisk mediering, samt at der synes at kunne være en flydende overgang herimellem. Eksemplet synes ikke som sådan at indfange, at eleverne kan få en forståelse af, at programmet også kan udgøre en retfærdiggørende mediering. Det kunne have været tilfældet, hvis de ikke satte spørgsmålstegn ved eller undersøgte begrænsningerne. Derudover kan det at tale om programmets muligheder og begrænsninger også understøtte, at eleverne får mulighed for at udvikle en historisk bevidsthed i forhold til at være skoleelev i Danmark anno 2020, hvor GeoGebra er et meget brugt program i matematikundervisningen.

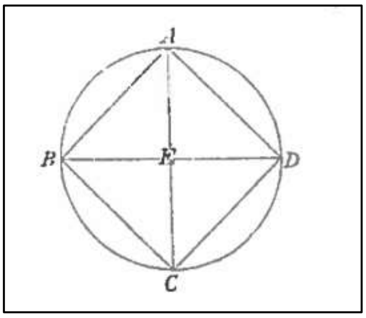
Eleverne skulle gerne ved denne øvelse have fået en begyndende forståelse for nogle af de forudsætninger, der kan karakteriseres som bærende ideer i Euklids bevisførelse. I dette tilfælde, hvor eleverne efterfølgende skal arbejde med Euklids sætning 6, bog IV, *I en given Cirkel at indskrive et Kvadrat*, kan nogle af de bærende ideer karakteriseres som netop at knytte sig til parallelaksiomet og at forlænge en begrænset ret linje, som netop var nogle af de understregninger, eleverne synes var svære at forstå i det indledende arbejde med forudsætningerne (se figur 14). Dertil kommer, at forudsætning 3, der omhandler cirkler også kan karakteriseres som en bærende ide i den sætning, det bevis, klassen efterfølgende skal til at arbejde med. Arbejdet med forudsætningerne kan yderligere medvirke til at understøtte, at eleverne i det efterfølgende arbejde i højere grad får et grundlag for at skelne mellem ideer og teknikaliteter, når de skal arbejde med at forstå Euklids beviser og selv prøve at bygge overbevisende argumentationer op for de samme geometriske figurer og forhold her inden for i deres arbejde med GeoGebra. Her kan ideer ses, som værende dem, der er gennemgående og bærende for Euklids opbygning af hhv. konstruktion og bevis – altså hvorfor forholder det sig således med de indbyrdes relationer mellem figurerne, mens en teknikalitet, fx kan være at argumentere med at vise, hvordan man kan konstruere en cirkel med cirkelværktøjet i GeoGebra, derefter et indskrevet kvadrat ved hjælp af knappen “regulær polygon” og derefter indsætte diagonalerne. Hensigten med, at eleverne skulle arbejde med at afprøve forudsætningerne i GeoGebra var bl.a. at give dem mulighed for i denne øvelse at arbejde med dynamisk læsning. Umiddelbart synes det som om, eleverne ved at arbejde med forudsætningerne har fået et grundlag for at arbejde videre med en dynamisk læsning af både sætning 6, Bog IV og brugen af GeoGebra.

### 6.2.2. Case 2 – Episode 2 - Arbejdet med Euklids sætning 6, Bog IV

I Episode 2 arbejder klassen med et uddrag af sætning 6, Bog IV, *I en given Cirkel at indskrive et Kvadrat*. Forinden har de på forskellig vis arbejdet med det foregående af denne sætning. Uddraget handler om, at vinkel BAD altid er ret i en halvcirkel. Selvom uddraget af sætning 6, Bog IV er udgangspunktet for elevernes undersøgelse, så giver det ikke i sig selv, eleverne mulighed for at følge Euklids bevis herfor. Eftersom Euklid i dette uddrag tager udgangspunkt i et bevis fra en tidligere sætning. Eleverne bliver ikke henvist til den tidligere sætning, men bedt om at forsøge at undersøge og formulere, hvorfor det gælder, at vinkel BAD altid er ret i en halvcirkel. Hensigten med denne opgave var dels, at eleverne kunne bruge GeoGebra til at undersøge de to uddrag fra sætning 6, Bog IV og dels, at eleverne kunne bruge det, de hidtil havde arbejdet med til at formulere deres egne argumenter, ræsonnementer og beviser i forbindelse hermed.

Denne episode består af 3 sekvenser. Hver sekvens omhandler et makkerpars/en gruppes arbejde med uddraget. Der indgår hhv. screencast og deres skriftlige besvarelser. De 3 sekvenser er udvalgt, fordi de viser nogle forskellige udfordringer makkerparrene/grupperne stod overfor i forhold med denne del af Euklids tekst og de tilhørende opgaver. Hovedfokus i analyserne af de 3 sekvenser er distinktionerne mellem 1) de tre typer af medieringer, 2) den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Derudover inddrages distinktionerne mellem regel- og strukturopfattelse samt statisk og dynamisk læsning også, dog lidt mere perifert end de andre to. Sekvenserne bliver også set i lyset af at understøtte elevernes mulighed for at udvikle en historisk bevidsthed.

Opgaveformuleringen tog udgangspunkt i tekstuddraget fra sætning 6, bog IV. Her er indsat "bidder" af originalkilden (Eibe 1897b, s. 73), hvortil der er skrevet spørgsmål undervejs (se figur 16). Derudover var illustrationen fra Euklids sætning 6, bog IV (figur 15) ikke medtaget i denne opgave, men eleverne havde tidligere arbejdet med selv at konstruere den i GeoGebra og kendte derfor til figuren af det indskrevne kvadrat i en given cirkel.




*Figur 15: Illustration til Euklids sætning 6, bog IV (Eibe 1897b, s. 73).*

I forbindelse med dette tekstuddrag bliver eleverne bedt om at konstruere halvdelen af Euklids figur i GeoGebra. Formålet med opgaveformuleringen og måden at arbejde med det på i GeoGebra var, at eleverne skulle få blik for, at de to trekanter er ligedannede i det indskrevne kvadrat og blik for, hvad der sker med vinklerne i ligebenede trekanter. Opgaveformuleringerne eleverne skulle arbejde med er præsenteret i figur 16.

Opgaveformuleringen i "komprimeret form". I de opgaver eleverne fik udleveret, var der plads til, at de kunne skrive imellem de forskellige opgaver.

**3.** Jeg siger saa, at den ogsaa er retvinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er ∠ BAD ret.

Undersøg i GeoGebra:

Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det?

Hvorfor gælder det eller gælder det ikke?

Vil det altid være sådan i en halvcirkel? Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis.

**4.** Af samme Grund er ogsaa hver af Vinklerne ABC, BCD og CDA ret. Altsaa er Firside ABCD retvinklet.

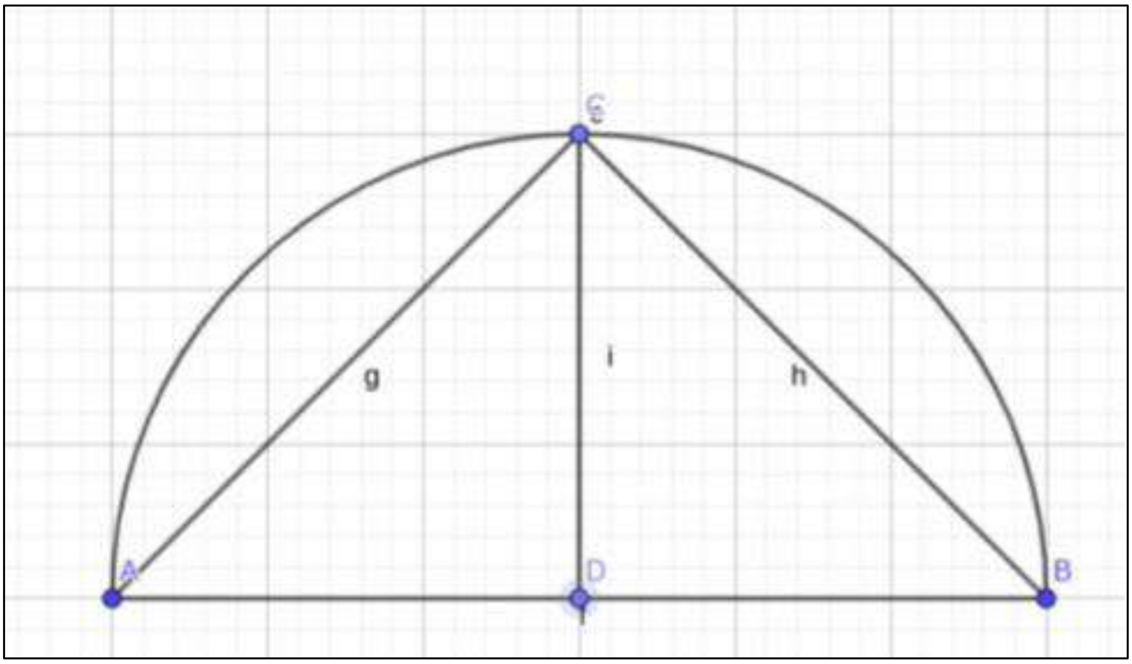
Er I enige – hvorfor/hvorfor ikke?

*Figur 16 – Opgaveark – "Bidder" af originalkilden (Eibe 1987b, s. 73) og spørgsmål dertil.*

Introduktionen til opgaven består i, at læreren konstruerer en halvcirkel i GeoGebra på smartboardet, og eleverne konstruerer en lignende figur på deres computere, hvorpå de kan trække punkt A rundt i halvcirklen og se, om den vil forblive 90 grader. Læreren fortæller bl.a. om placeringen af punkterne B, A og D. Lige såvel som de taler om halvcirklen i forhold til den "fulde figur", de tidligere har arbejdet med, og som hører til sætning 6, Bog IV. Den "fulde figur" er både tegnet på tavlen og på "GeoGebra-siden" på smartboardet, hvor læreren kan zoome ind på de forskellige figurer under forklaringerne. Læreren pointerer, at eleverne kun skal arbejde med udgangspunkt i en halvcirkel i denne opgave, da det giver dem muligheder for at bruge GeoGebras funktioner. Læreren placerer midtpunktet på diameteren i halvcirklen og konstruerer linjen herfra til punktet A. Desværre får de ikke i den fælles introduktion placeret punktet E (det der var centrum i figuren fra sætning 6, figur 15), hvilket resulterer i, at flere af makkerparrene har kaldt det punkt for c eller noget andet. Derudover er der også grupper, der på deres konstruerede figurer i GeoGebra har navngivet punkterne forkert i forhold til tekstuddraget fra Euklids sætning 6, bog IV.

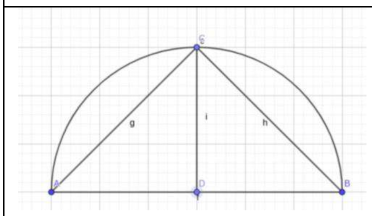
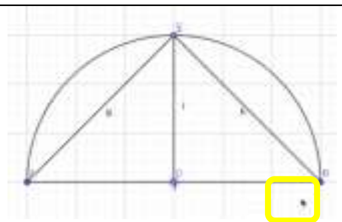
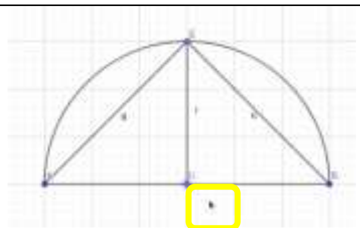
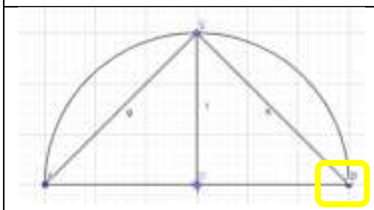
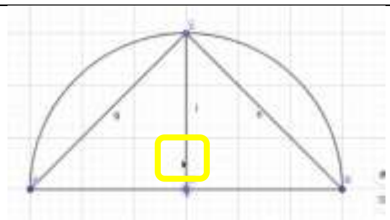
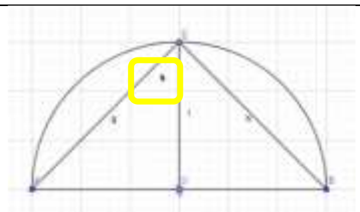
*Sekvens 1 – Forvirrende navngivning af punkter – Makkerarbejde*

Denne sekvens er valgt, fordi den adskiller sig fra de andre sekvenser ved, at eleverne arbejder med og taler ud fra et stationært billede i GeoGebra (figur 17).




*Figur 17: Skærmbillede – Figuren et makkerpar arbejder ud fra.*

Det er ikke til at vide, om det er et bevidst valg fra elevernes side, eller om de blot ikke får ideen til at bruge GeoGebra til fx at trække i nogle punkter. Figur 18 viser, at makkerparrets måde at bruge GeoGebra hovedsageligt består i, at de flytter pilen, så den understreger, det de taler om.

| Billede 1 | Billede 2 | Billede 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Billede 4 | Billede 5 | Billede 6 |
|  |  |  |

*Figur 18: Skærmbilleder – Uddrag af rækkefølgen i makkerpars arbejde med figuren. Pilen og "håndens" placering er highligted efterfølgende.*

Nedenstående dialog er et uddrag af makkerparrets første screencast og knytter sig til figur 18.

E1: (Læser op) Jeg siger så, at den er retvinklet, thi den er ret. Linje BD er diameter. (Peger på punkterne imens – se figur…) i cirkel ABCD og så er BAD en halvcirkel og (vinkel) BAD er ret. Altså jeg vil sige, BD er ikke diameter … Jeg tænker ikke, at BD er diameter. Det er mere, ja, radius.
E2: Ja, D er radius.
E1: Ja, nej, D er centrum. Så er BAD en halvcirkel. Altså er BAD ret (Læser). Så jeg vil sige BAD, den er ret (peger med pilen omkring punkt B på deres konstruktion – se billede 4).
E2: Skal vi bare skrive, ja, den er ret. (her peges der omkring punkt D på deres konstruktion, se billede 5 og hurtigt videre til punkt C, se billede 6)
E1: Jaah, det tænker jeg da. Sådan passer det? Altså jeg er ikke sikker, fordi det forvirrer mig lidt det her.

Her stopper makkerparrets første screencast. Eleverne bruger pilen i GeoGebra til nemt at vise de forskellige punkter på skærmen (billede 2 og 3). Derudover kan det også synes som om, makkerparret gør brug af gitteret, forstået på den måde, at de godtager, vinkel BAD er ret. Her flakker deres pil lidt rundt, men er omkring vinkel ACB og vinkel BCD på deres tegning. Nedenfor er en transskription af et uddrag af makkerparrets anden screencast.

E2: (Læser sidste spørgsmål op). Vil det altid være sådan i en halvcirkel. Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis.
E1: Altsååå, altså bare sige det er en halvcirkel. Det vil det jo, for hvis du prøver at blive ved og ved vil det jo, med mindre at halvcirklen…
E2: Altså, hvis du putter en halvcirkel til på, så vil det blive en hel cirkel. Så derfor, når du fjerner den halve cirkel, så er det en halv
E1: Altså uanset, hvor stor eller lille den er, så vil det… Jeg ved ikke, hvordan man ellers vil vise det. Jeg vil sige, at det altid vil være sådan uanset hvad du gør. Så vi vil nok skrive, at ja, sådan vil det bare altid være.

Det er ikke helt tydeligt, om eleverne fortsat taler om den rette vinkel. Det synes snarere som, at de fokuserer på karakteristika ved en halvcirkel. Uanset om det er vinklen eller en halvcirkel, der er udgangspunktet for deres dialog, bruger de igen ikke direkte funktionerne i GeoGebra. Eleverne kunne formentligt have haft den samme diskussion, hvis de havde taget udgangspunkt i en tegning på papir. Det synes svært at analysere denne del af casen ud fra Mellin-Olsens (1984) distinktion mellem regel- og strukturopfattelse, eftersom eleverne snarere arbejder med at definere de forskellige forhold ved en cirkel og rette vinkler end ved egentligt at arbejde med nogle regler i forhold hertil. Hvilket indikerer, at eleverne hovedsageligt arbejder inden for karakteristikken af tankegangskompetencen. Deres eksplicitte italesatte tvivl kan også tale for, at de arbejder i overgangen mellem tankegangskompetencen og ræsonnementskompetencen. Det synes som om arbejdet med uddragene af Euklids tekster, og opgaverne i tilknytning hertil har understøttet, at eleverne er i gang med at udvikle et sprog og en måde at opstille argumenter på, når de arbejder med geometriske figurer i GeoGebra. De er godt klar over, at der er noget, der ikke helt stemmer og synes på jagt efter, hvad det er, de skal arbejde videre med og forklare. I slutningen af makkerparrets første screencast spørger E2: "Skal vi bare skrive, ja, den er ret". Hvortil E1 svarer: "Jaah, det tænker jeg da. Sådan passer det? Altså jeg er ikke sikker, fordi det forvirrer mig lidt det her." Eleverne er ikke helt overbeviste på dette tidspunkt. Derfor synes første del af makkerparrets anden screencast også lidt overraskende. Den er ikke transskriberet, men her henviser makkerparret til deres første screencast og bruger det, at de lige har vist det i den foregående screencast som argument for, at derfor gælder det, når de svarer på spørgsmålet: "Hvorfor gælder det eller gælder det ikke?" Det fremgår også af makkerparrets skriftlige besvarelse, som er gengivet i figur 19.

| Opgave | Svar | Illustrationer |
|---|---|---|
| 3. Jeg siger saa, at den ogsaa er retvinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er ∠ BAD ret.<br><br>**Undersøg i GeoGebra:**<br>Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det? | Ja, det passer og vi vil jo lave (lidt i tvivl om det er det der står) figuren og sådan kan man se det. | |
| Hvorfor gælder det eller gælder det ikke? | Det gælder fordi vi prøvede og det var rigtigt. | |
| Vil det altid være sådan i en halvcirkel? Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis. | Ja, fordi sådan vil det altid være. | |
| 4. Af samme Grund er ogsaa hver af Vinklerne ABC, BCD og CDA ret. Altsaa er Firsidet ABCD retvinklet.<br><br>Er I enige – hvorfor/hvorfor ikke? | Ja, fordi vi lige har vist det. | |

*Figur 19: Skema – Makkerpars besvarelse på opgaveark (figur 16). Opgavearket består af tekstbidder fra Euklids sætning 6, bog IV (Eibe 1897b, s. 73) samt spørgsmål.*

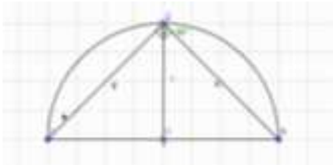
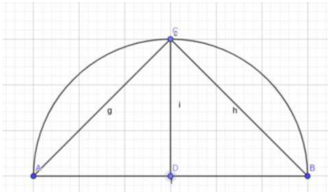
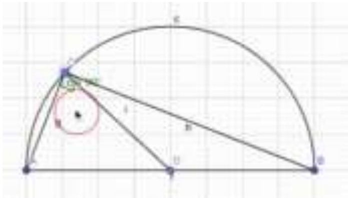
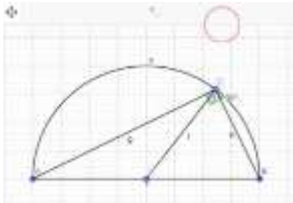
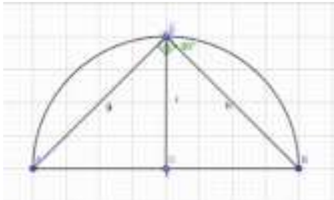
Makkerparret henviser 3 gange i deres skriftlige besvarelse til deres arbejde i GeoGebra og synes overbeviste af, at "sådan kan man se det", "det gælder fordi vi prøvede og det var rigtigt" og "ja, fordi vi har lige vist det". Ved første øjekast kan dette karakteriseres som, at GeoGebra udgør en pragmatisk mediering, men eftersom eleverne ikke giver en nærmere beskrivelse af, hvad de lige har vist, og hvis det sammenholdes med uddraget af deres dialog i første screencast, synes her snarere at være tale om, at GeoGebra udgør en retfærdiggørende mediering. Eleverne læner sig op ad GeoGebra som en autoritet – også selvom de egentligt var i tvivl i den første screencast.

Elevernes brug af Geogebra i denne sekvens synes at kunne føres tilbage til, at eleverne som udgangspunkt har navngivet punkterne i deres konstruktion i GeoGebra, så de ikke stemmer overens med dem i teksten. På trods heraf vurderes det, at denne sekvens kan danne grundlag for flere forskellige opmærksomhedspunkter, som kan være værd at holde sig for øje i forhold til at formulere didaktiske principper, der understøtter udvikling af ræsonnementskompetencen, når der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Sekvensen giver også eksempler på, at eleverne arbejder i overgangen mellem tankegangs- og ræsonnementskompetencen, som måske også kan bidrage til en nuancering af de tre typer mediering Misfeldts og Jankvist (2018) definerer. Der vendes tilbage til det i afsnit 6.2.4. "Opsamling på case 2".

*Sekvens 2 – Når forklaringen ikke ligger lige for – Gruppearbejde og dialog med lærer*

Denne skevens er medtaget, fordi gruppen i lang tid hælder til, at de ikke kan give en forklaring, selvom de er klar over, at det er det, der forventes af dem[27]. Her bliver lærerens spørgsmål afgørende for, at de kan komme videre. Derudover er det en sekvens, hvor der er flere forskellige medieringer på spil. Denne gruppe har også afleveret to screencasts. På den ene fortæller de om punkternes placering, og på den anden arbejder de sig hen imod forskellige ræsonnementer. Der er tre elever i gruppen. Elev 3 (E3) og 5 (E5) er stemmemæssigt lidt svære at skille fra hinanden. Derfor kan det være at elevhenvisningerne er lidt misvisende i denne sammenhæng, men det vurderes ikke at have nogen betydning for udfaldet af analysen. Først vises forskellige skærmbilleder fra gruppens screencasts. Billede 1 i figur 20 er fra gruppens første screencast, mens de resterende billeder er fra deres anden screencast.

[27] Delelementer fra denne case har været præsenteret på konferencen Norma 20 med en analyse, der tog udgangspunkt i den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002) samt i Sfards (2008) teori om commognition med særligt fokus på objekt-level rules og meta-rules. Casen var ikke en del af paperet, Thomsen (2021), der er udgivet i Norma 20s preseedings.

| Billede 1 | Billede 2 | Billede 3 |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Billede 4 | Billede 5 | Billede 6 |
|  |  |  |

*Figur 20: Skærmbilleder – Uddrag af  gruppes arbejde med figur.*

Nedenstående er et uddrag fra gruppens første screencast.

E3: ABD er sådan. A er den øverste. B den…ehh…(peger med pilen ned mod det punkt, der på deres konstruktion er A – billede 1) er sådan her nede til venstre.
E4: Nåhh, nu forstår jeg.
E5: D er den nederste til højre.

Ligesom i den foregående sekvens har eleverne navngivet punkterne anderledes end i tekst-uddraget. Denne gruppe er bevidste om det og starter med lige at forklare, hvordan det forholder sig, hvis de to figurer skulle sammenholdes. De vælger dog ikke at ændre bogstaverne på punkterne, men arbejder videre ud fra en forståelse af, hvordan punkterne skulle have været placeret, hvis det skulle passe med teksten. Det synes som, at gruppen er klar over, hvad opgaven som udgangspunkt går ud på.

I gruppens anden screencast tager eleverne udgangspunkt i den samme figur (billede 2 i figur 20). Deres anden screencast består af flere forskellige "bidder". Ind imellem pauses screen-casten, fx når eleverne venter på, at læreren kommer over til dem. I det følgende præsenteres deres samtale, således at der knyttes en analyse til hver "bid" i screencasten.

E5: Hvordan vil I måle den der vinkel (peger op mod C)?
E4: Man kan vel tage en vinkelmåler.
(Der bliver klikket på vinkelmålerikonet)
E5: Er det den der først (peger på g)?

E4: Nej højre.
E5: (får sat vinkel på, billede 3) Det var faktisk den der først.
E3: Så på den måde kan man så se, at det er en ret vinkel. Og Euklid har ret igen, igen, igen…

GeoGebra kan siges at udgøre både en pragmatisk og retfærdiggørende mediering her. Eleverne måler vinklen i den givne figur (billede 3 på figur 20) og godtager resultater samt bruger det til at understøtte en opfattelse af, at “Euklid har ret igen, igen, igen…” Det kan siges at være en pragmatisk mediering, som knytter sig til det empiriske overbevisningsskema, eftersom eleverne bruger vinkelmålerikonet til at angive den rette vinkel og bliver overbevist af deres eksempel. Hvis gruppen ikke var gået videre med deres arbejde, kunne GeoGebra i denne sekvens måske snarere tolkes som at udgøre en retfærdiggørende mediering. Det kunne medføre, at gruppens arbejde med den øvelse understøttede en udvikling af det Harel og Sowder (2007) kalder eksterne overbevisningsskemaer. Gruppen pauser screencasten her. Det synes som om, de lige skal finde ud af, hvad de så skal. Derefter fortsætter samtalen, som følger:

E4: Vi har lige gjort det.
L: Ja.
E5: Men hvad så?

Eleverne stopper screencast igen. Her synes GeoGebra umiddelbart at udgøre en retfærdiggørende mediering. Det synes dog ret tydeligt, at eleverne her er klar over, at de bygger på et eksternt overbevisningsskema. Da de ikke stoppede ved udsagnet: “Vi har lige gjort det”. Screencasten starter igen. Der trækkes i punktet C (billede 4 og 5 på figur 20).

E5: Vi målte den før med en vinkelmåler (Pause – trækker videre i punkt C). Hvorfor gælder det?
E4: Fordi det gælder.
E5: Hvorfor gælder det?
E4: Fordi det gælder.
E3: Fordi at….
E5: Hvorfor gælder det? Men nu spørger jeg dig.
E4: Nej,
E5: Jo, jeg gør.
E4: Spørg E3.
E5: E3, hvorfor gælder det? Eller gælder det ikke? Hvorfor?
(Pause)
E3: Det ved jeg ikke. (griner lidt, pause) Jeg ved det ikke.
E4: Det er altid mig og E3, der skal svare på det.
E5: (pause) I er gode (pause)

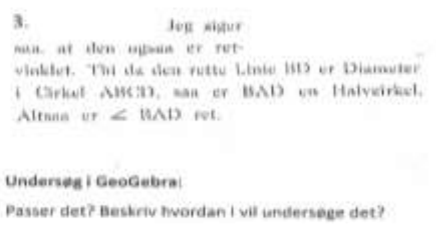
Herefter pauser de igen deres screencast. Her begynder de at trække i punktet C og stiller gentagende gange spørgsmålet: “Hvorfor gælder det?” og går så over til at sige “Det ved jeg ikke”. Efterfølgende synes det som om, gruppen pauser screencasten for at tilkalde læreren. I hvert fald er læreren med i den efterfølgende dialog. Når de starter screencasten igen, ser billedet ud som på billede 6 på figur 20. Sådan vedbliver det at være resten af samtalen.

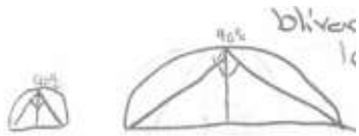
E3: Hvad er det, der skal gælde eller ikke skal gælde?
L: Gælder det?..(pause)…Hvorfor er det sådan. Passer det til at starte med. Har I undersøgt det?
Eleverne svarer: Ja, det gør det.
L: Hvad har I brugt?
E4: GeoGebra
E3: Vinkelmåleren i GeoGebra.
(En kommenterer programmets navn i forhold til, hvor trykket skal lægges).
L: Så skal I prøve nu at se, kan I prøve på en eller anden måde at forklare, hvorfor er det sådan? Allerførst, der ser I. Var det egentligt rigtigt?
Elever: Ja.
L: Passede det? Det gjorde det, godt. Nu skal vi så prøve at se. Kan vi på en eller anden måde forklare? Kan vi prøve at komme ind på noget, hvor at vi siger, det er det fordi… et eller andet? Kan vi kigge på de der trekanter…?
E3: Det er sådan retvinklede trekanter.
L: Der er noget med nogle retvinklede trekanter. Et eller andet…Kan vi bruge GeoGebra noget mere, skal vi sætte nogle flere vinkelmålinger på? … Et eller andet…
E5: Men kan man ikke også bare sige, at det er bare rigtigt?
L: Nej.
E3: Men kan man ikke også bare sige, at det er fordi, at det er et halvt kvadrat og derfor er siderne lige lange og derfor er det også en ret vinkel?
L: Der er I allerede inde og bruge alle mulige argumenter…“Fyr dem af”.
E3: Altså, altså (pause) … såå, det gælder fordi, det er et kvadrat, eller sådan fordi det er et halvt kvadrat og derfor er vinkel BAD ret, fordi alle vinkler i et kvadrat er rette (pause)…Det er i hvert fald det jeg tænker, som er grunden til det.
E5: Det lyder også meget rigtigt.
E3: Ellers kunne man også sige at, det er to retvinklede trekanter og så bliver spidsen oppe i toppen 45 grader og 45 grader og 45 grader, 2 gange 45 grader tilsammen er 90 grader. Derfor er det en ret vinkel.
E5: Ja..
(Screencasten stopper)

Eleverne starter med at spørge læreren, hvad det er, der skal gælde. De synes usikre på, hvad opgaven egentligt går ud på. Læreren svarer dem ikke som sådan på det stillede spørgsmål, men prøver i stedet for at spørge til, om eleverne har undersøgt det. Efter eleverne har svaret ja til det, spørger læreren, hvordan eleverne har grebet opgaven an. Det kan tolkes som, at læreren forsøger at lade eleverne forklare, hvordan de har grebet det an og på den måde støtte dem i at komme videre med udgangspunkt i deres forståelse af opgaven. Læreren giver dem hints i den forbindelse, fx i form af at sige: “Kan vi kigge på de der trekanter…?” Og lidt senere “Kan vi bruge GeoGebra noget mere, skal vi sætte nogle flere vinkelmålinger på? … Et eller andet…” Hertil spørger E5: “Men kan man ikke også bare sige, at det er bare rigtigt?” Det kan tolkes, som at E5 er i tvivl om, hvad et matematisk bevis er, men det kan også tolkes som, at E5 lader sig overbevise af, at de jo har set det i GeoGebra, altså at GeoGebra her synes at have en pragmatisk eller retfærdiggørende mediering. Hertil svarer læreren blot “nej”. Her kunne læreren have valgt at give en yderligere forklaring, men det synes som, det korte svar “nej” understøtter, at eleverne i gruppen går i gang med at bruge den produktive side af deres ræsonnementskompetence. De begynder at tale om halvkvadrater, inddrage forskellige regler, fx om at alle vinkler i et kvadrat er rette og, at 2 vinkler à 45 grader giver 90 grader osv. Denne tilgang understøtter elevernes argumenter, deres ræsonnementer. Ligesom det kan karakteriseres som, at gruppen arbejder inden for rammerne af en strukturopfattelse. Eleverne har i det foregående uddrag fra denne screencast arbejdet med at trække punktet C rundt på halvcirkelperiferien og dermed også set, at vinkel ACB i deres konstruktion i GeoGebra vedbliver med at være ret uanset hvor på cirkelperiferien, den befinder sig. Det gør dog ikke, at de stiller spørgsmål til, om deres forklaring med de 2 gange 45 grader holder. På sin vis bliver vinklerne i hhv. de to vinkelrette trekanter og i et kvadrat det eneste, de refererer til i deres ræsonnementer. Det bliver med andre ord GeoGebras vinkelværktøj og ikke muligheden for dragging, der bliver inddraget i deres ræsonnement. De argumenterer ud fra det eksempel, (billede 5 på figur 20), der er på deres skærm i det øjeblik, læreren stiller spørgsmål til dem. Derfor kan GeoGebra på den ene side siges at udgøre en pragmatisk mediering, men elevernes arbejde med at undersøge og formulere argumenter synes på den anden side at indikere, at GeoGebra udgør en epistemisk mediering. Denne tolkning synes også understøttet af gruppens skriftlige besvarelse.

I sekvensen bliver det bl.a. tydeligt, at elevernes interaktion med læreren er yderst vigtig i forhold til at understøtte eleverne i at kvalificere deres ræsonnement. Derudover er det interessant, at eleverne, selvom de har været omkring at trække i punkt C og set at vinkel ACB vedbliver med at være 90 grader uanset, hvor den er placeret på halvcirkelperiferien, ikke vælger at inddrage det i deres ræsonnementer. De bruger GeoGebra til at verificere deres påstand om, at vinkel BAD er vinkelret, men ikke til at verificere et ræsonnement bestående af en kæde af argumenter.

Gruppen har afleveret to skriftlige håndskrevne besvarelser. De er skrevet af og gengivet i nedenstående tabel. Illustrationerne er et uddrag af et skærmbillede af elevernes håndskrevne besvarelser:

| Opgave | Svar | Illustrationer |
|---|---|---|
| <br>3. Jeg siger saa, at den ogsaa er retvinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er ∠ BAD ret.<br>Undersøg i GeoGebra:<br>Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det? | Svar:<br>Ja det passer fordi det passer til det han forklarer.<br>Svar:<br>Vi målte vinklen med en vinkelmåler. | |

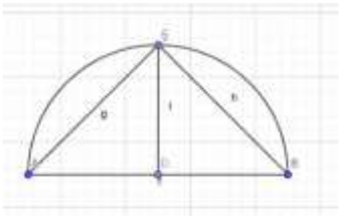
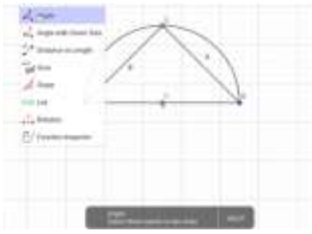
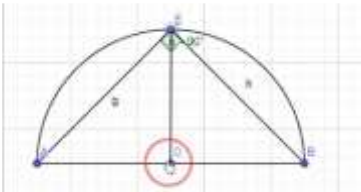
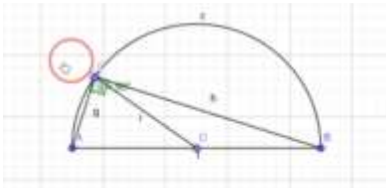
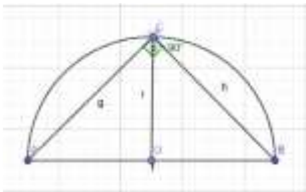
| | | |
|---|---|---|
| Hvorfor gælder det eller gælder det ikke? | Svar:<br>Det gælder, fordi at det er en halv kvadrat og at Ab og d er det samme på den anden side.<br>Svar:<br>Det gælder, fordi det er et halvt kvadrat og derfor er vinkel BAD ret fordi alle vinkler i et kvadrat er rette. Det kan også være fordi der er to rette vinkler og så er de øverste 45 grader og tilsammen giver de 90 grader og 90 grader er en ret vinkel. | |
| Vil det altid være sådan i en halvcirkel? Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis. | Svar:<br>Ja, fordi alle halvcirkler er ens. Hvis halvcirklen bliver større bliver linjerne også større. |  |
| 4. Af samme Grund er ogsaa hver af Vinklerne ABC, BCD og CDA ret. Altsaa er Firside ABCD retvinklet.<br>Er I enige – hvorfor/hvorfor ikke? | Svar:<br>Ja fordi det er det samme bare med andre navne. | |

*Figur 21: Gruppes besvarelse på opgaveark (figur 16). Opgavearket består af tekstbidder fra Euklids sætning 6, bog IV (Eibe 1897b, s. 73) samt spørgsmål.*

I elevernes skriftlige besvarelse skriver de bl.a.: “Det gælder, fordi det er et halvt kvadrat og derfor er vinkel BAD ret, fordi alle vinkler i et kvadrat er rette. Det kan også være, fordi der er to rette vinkler og så er de øverste 45 grader og tilsammen giver de 90 grader og 90 grader er en ret vinkel”. Her præsenteres deres argumenter lige efter hinanden, men som to forskellige uafhængige argumenter. Hvis eleverne havde byttet om på rækkefølgen og yderligere havde inddraget længderne på siderne i de to retvinklede trekanter, havde de måske kunne formulere et argument om vinklerne i ligebenede trekanter og derefter ført det videre til at argumentere for, at vinkel BAD må være retvinklet. På den måde kunne de opbygge en kæde af argumenter.

*Sekvens 3 – Vekslen mellem dialog og skriftlig forklaring – Makkerarbejde og dialog med lærer*

Denne sekvens er medtaget, fordi den umiddelbart synes at vise nogle interessante ting omkring en dialog eleverne i mellem, eleverne og læreren imellem samt at skulle skrive ned, mens man er i gang med at ræsonnere. Figur 22 præsenterer skærmbilleder fra makkerparrets screencast.

| Billede 1 | Billede 2 | Billede 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Billede 4 | Billede 5 | Billede 6 |
|  |  |  |

*Figur 22: Skærmbilleder – Uddrag af rækkefølgen på makkerpars arbejde med figur.*

Makkerparret starter med at kalde på læreren og ændrer konstruktionen fra billede 1 til billede 2 (i første omgang uden vinkel). Når læreren er ved gruppen, foregår følgende dialog:

E6: Ja, vi tager vinkelfunktionen.
L: Ja. (eleverne peger med pilen på ikonet, billede 2), tryk lige på den, så vi er sikre.
E6: Den her?
L: Ja.
E6: Jeg skal så “selecte” 3.
L: Nej, bare 2.
E6: Der står 3 points or 2 lines. Nå, ok.
L: Ok.
E6: 90. Så er den jo ret (billede 3).
L: Ok.
E6: Ja, den er ret, fordi at vi brugte vinkelfunktionen i GeoGebra.
L: Så, hvad var opgaven her. Hvordan vil I undersøge det? (Pauser screencasten. Læreren går videre til andre grupper)

Denne gruppe adskiller sig fra de andre to grupper ved, at de med det samme kalder på læreren. Det synes som om, de lige har brug for at blive bekræftet i, at det de gør i GeoGebra er rigtigt. De indleder selv samtalen med læreren ved at sige: “Ja, vi tager vinkelfunktionen” og så kredser de lidt om vinkelikonet med pilen, indtil læreren siger: “(…) tryk lige på den, så vi er sikre” og

E6 spørger læreren: “den her?”. De pauser screencasten umiddelbart efter læreren har spurgt: “Så, hvad var opgaven her. Hvordan vil I undersøge det?” De synes at starte screencasten igen umiddelbart efter det oventående uddrag. I det næste uddrag deltager læreren ikke

E6: Ja, vi undersøgte det ved at kigge på den først.
E7: Så satte vi en vinkel på for at se, om den var ret.
E6: Ja, så kunne vi vise det ved vinkelfunktionen i GeoGebra (pause). Læs op, mens jeg skriver.
E7: (Lidt tvivl om, hvad der skal læses op) Nåhh…. Hvorfor gælder det eller gælder det ikke?
E6: Hvad?
E7: Hvorfor gælder det eller gælder det ikke?
E6: Det forstår jeg ikke.
E7: Det gør jeg heller ikke (pause)
E6: Hvorfor gælder det eller gælder det ikke? Vi kalder lige på L, to sekunder (taler til screencasten og pauser optagelsen).

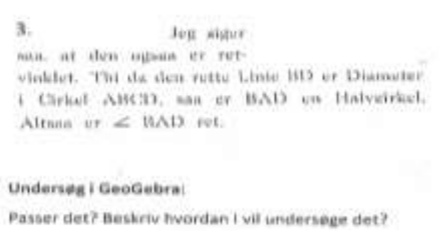
Det tyder på en pragmatisk mediering, når elevernes i deres første svar siger, at de har vist det i GeoGebra. Her lader eleverne sig overbevise af, at de har brugt vinkelmåleren i GeoGebra i deres konstruerede figur. Igen vælger de at kalde på læreren, når de er i tvivl om opgaveformuleringen. Når de tænder screencasten igen er dialogen som følger:

L: Så er det vi skal prøve at se, kan vi prøve at komme frem til, hvorfor det er sådan? Kan man på en eller anden måde få noget hjælp ved at sætte den inde i midten. Jeg ved ikke, om det hjælper eller det forvirrer? Jeres opgave er nu at prøve at argumentere for…
E6: Hvis vi prøver at sætte “linesegment” ind her (sætter et linjestykke ind, billede 4).
L: Ja, hvorfor må den der være en ret vinkel?
E6: Nej, det er hvorfor gælder det eller gælder det ikke.
L: Ja, hvorfor. Han siger, at når man gør det på den her måde, så vil den der oppe altid være ret.
E6: (lille pause) Det er fordi, at det er to trekanter.
L. Hvorfor mmm…godt.
E6: Så fx den her trekant alene. Den her halv-ting. Så bare den her. Den har en spidsvinkel. Sådan her en spidsvinkel (viser formentligt noget med en tegning, se den skriftlige besvarelse). Og så den her, den har også en og så bliver det til en ret vinkel, hvis man blander dem sammen.
L: Det er slet ikke dumt det der.
E6: Så, hvis de går op ad hinanden, så bliver det jo ret.
L: Ja, hvad hvis du hiver i det, hvad sker der så, altså hvis du hiver i det punkt deroppe?
E6: Den kommer altid til … Nej lad mig lige prøve det. Hvis jeg hiver i det her (hiver i punktet ned langs cirkelperifieriens venstre side (billede 5). Den kommer altid til at være ret. Så når to trekanter går op imod hinanden (sætter punkt C op i “midten” igen – Billede 6).
L: Ja, prøv at forklar.
E6: Hvad mener du.
L: Ligesom nu, prøv at skriv det. Det var godt (læreren går).
E6 og E7: Jammen, ja, vi har….
E6: Vi ses om 2 (sætter screencast på pause).

Læreren spørger eleverne: “Ja, hvorfor må den der være en ret vinkel?” Hvortil E6 svarer: “Nej det er, hvorfor gælder det eller gælder det ikke”. Her synes opgaven omkring, hvorvidt det gælder/ikke gælder at give anledning til usikkerhed hos eleverne omkring, hvad det er der spørges til, også selvom læreren lægger ud med at spørge direkte til den rette vinkel. Derefter er det interessant at se, at E6 er på vej ud i en forklaring, men så alligevel siger, “Nej lad mig lige prøve det.” Det kan tolkes som, at E6 bliver usikker på sin forklaring, inden den for alvor er gået i gang, og så kan det også tolkes som, at E6 har brug for visualiseringen, som en understøttende faktor, altså at GeoGebra udgør en epistemisk mediering. E6 ser hvad der sker, italesætter det og går herefter i gang med en forklaring. Makkerparret hiver ikke punkt C ned langs den højre side af halvcirkelperiferien. Punkt C bliver også sat cirka i midten. Det er også bemærkelsesværdigt, at punkt D i denne gruppes konstruktion ikke ligger i et gitterhjørne, hvilket gør, at gruppen, hverken direkte eller indirekte kan støtte sig op af en gittervisualisering, hvor hjørnerne kan udgøre en ret vinkel. Det kan være årsag til, at eleverne kun fokuserer på vinkel ACB i deres forklaring. E6 synes dog at gå lidt i stå i sin forklaring, efter at de har vist det i GeoGebra. Læreren prøver at "skubbe" lidt til, at E6 fortsætter sin forklaring og opfordrer dem til at skrive ned imens. Her synes det igen, som E6 og E7 bliver lidt i tvivl om, hvad de skal og de pauser screencasten. Lyden er slået til i deres screencast, mens de skriver. Afslutningsvist bruger de også billedet på skærmen til at vise nogle punkter:

E7: Ja, det vil altid være sådan.
E6: Ja, også når man drejer det rundt med bevægelse, så vil den altid være sådan. Så lad os sige, at man har en hel cirkel, så vil der være to rette vinkler, fordi der er en under og en over.
E7: Ja, det var så ….
E6: Var det også beviset?
E7: Ja.
E6: (Læser) Af samme grund er også hver af vinklerne ABC, BCD og CDA ret. Altså er firsidet ABCD retvinklet. Er I enige, hvorfor/hvorfor ikke?
E7: Jeg er enig.
E6: Jeg er faktisk også enig. Hvorfor er du enig?
E7: Fordi det giver mening.
E6: Jeg synes også bare, det giver mening, når man læser det op. Af samme grund er også hver af vinklerne ABC. Hvis man siger ABC (viser på tegningen og her giver det faktisk ikke mening).
E7: Jahh.
E6: Ja, så ABC og BC og D (viser også på tegningen – tøver lidt). Se ABC (stopper med at følge på tegningen) og BC og D og CDA ret.
E7: Ja, det synes jeg.
E6: Og man kan også godt se det på selve tegningen.
E7: Ja
E6: Så ja.

Gruppens skriftlige svar er gengivet i nedenstående figur.

| Opgave | Svar | Illustrationer |
|---|---|---|
|  3. Jeg siger saa, at den ogsaa er retvinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er ∠ BAD ret.<br>Undersøg i GeoGebra:<br>Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det? | Vi undersøgte med vinkeltingen på GeoGebra |   |

| | | |
|---|---|---|
| Hvorfor gælder det eller gælder det ikke? | Fordi når to trekanter går ind i hinanden giver det en ret vinkel. |  |
| Vil det altid være sådan i en halvcirkel? Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis. | Ja fordi vi også har bevæget den. Det er altid det samme. | |
| 4. Af samme Grund er ogsaa hver af Vinklerne ABC, BCD og CDA ret. Altsaa er Firside ABCD retvinklet.<br>Er I enige – hvorfor/hvorfor ikke? | Ja | |

*Figur 23: Makkerpars besvarelse på opgaveark (figur 16). Opgavearket består af tekstbidder fra Euklids sætning 6, bog IV (Eibe 1897b, s. 73) samt spørgsmål.*

I makkerparrets skriftlige svar ses det bl.a., at de faktisk argumenterer med GeoGebra, når de skriver: "Ja fordi vi også har bevæget den. Det er altid det samme". Det er også selvom de undervejs har været på vej til selv at finde et mere generelt ræsonnement. I dialogen går eleverne videre end det, de har undersøgt i GeoGebra. Det ses fx, når E6 siger: "Så lad os sige, at man har en hel cirkel, så vil der være to rette vinkler, fordi der er en under og en over". Her synes deres arbejde med GeoGebra at have haft en epistemisk mediering. De har formuleret et ræsonnement omkring, at to trekanter, der går ind i hinanden, må give en ret vinkel, og det har de yderligere visualiseret i GeoGebra. Herudfra ræsonnerer de videre og forestiller sig formentligt, at de har en hel cirkel. Det afprøver de ikke i GeoGebra, men er enige om, at det er et bevis. Det er måske også årsagen til, at eleverne tilsyneladende bliver lidt forvirrede, når de skal til at argumentere for, at det gælder for fire vinkler. Her argumenterer de i første omgang med, at det giver mening, når man læser det. Her synes det tydeligt, at eleverne giver teksten værdi med udgangspunkt i deres eksterne overbevisningsskema. Derefter prøver de at følge punkterne på skærmen og lader sig overbevise om, at det er rigtigt, også selvom de tøver lidt undervejs. Afslutningsvist gør de det helt klart ved at sige: "Og man kan også godt se det på selve tegningen." Her synes det som om, at deres arbejde med GeoGebra tenderer at udgøre en retfærdiggørende mediering. Omvendt kan det her også være et udtryk for, at de måske har svært ved at forstå teksten. Det er ligesom elevernes egen forklaring fortaber sig lidt i det uvisse i afslutningen af deres screencast, også selvom de egentligt syntes at være godt på vej med at formulere forskellige ræsonnementer, der måske kunne blive til beviser. I forhold til Mellin-Olsens (1984) definitioner omkring regel- og strukturopfattelse, synes denne gruppe mest at arbejde ud fra en strukturopfattelse, både når de taler om to trekanter, der giver en ret vinkel, og at der må være to rette vinkler, hvis der var to halvcirkler. De går ikke som sådan ind i selve reglerne, fx om trekanternes vinklers størrelse i forhold til sidernes længder osv., men de forsøger at formulere nogle ræsonnementer på baggrund af deres viden om regler i forhold til trekanter og cirkler. På den baggrund synes det som, at eleverne er i gang med at prøve at formulere og skabe en kæde af argumentationer. Derfor kan man sige, at det var elevernes tilgang i slutningen af screencasten, også selvom det ikke lykkedes at gøre det korrekt, men de blev selv overbeviste heraf. Ligesom i de foregående sekvenser kan man ikke sige, at eleverne lykkedes med at formulere ræsonnementer, der havde en aksiomatisk deduktiv karakter, men det synes som om, at arbejdet med GeoGebra – i samspillet mellem dette udsnit af Euklids sætning 6, bog IV, de tilhørende opgaver, samtaler med elever og med læreren – udgjorde både en pragmatisk og epistemisk mediering. Sidstnævnte i form af at understøtte en udvikling af elevernes transformerede overbevisningsskemaer (Harel og Sowder, 2007, se afsnit 3.3.2.) også selvom de ikke kom i hus med nogle fuldt gyldige ræsonnementer i forhold til tekstuddragene. Samtidig bliver det også tydeligt, at man her må sætte spørgsmålstegn ved, hvornår et ræsonnement, der tager udgangspunkt i et Euklidisk bevis, kan kaldes fyldestgørende, når man arbejder med GeoGebra. Det handler den sidste del af dette nedslag bl.a. også om i relation til den fælles opsamlende dialog i klassen.

### 6.2.3. Case 2 – Episode 3 – Opsamling i klassen og skriftlige besvarelser

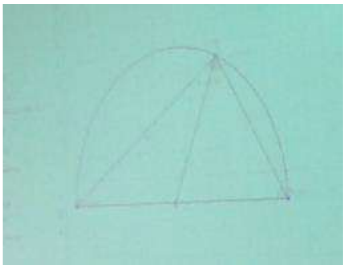
Episode 3 består af 2 sekvenser, én der knytter sig til den fælles opsamling i klassen[28], og én der er rettet mod en samlet gengivelse af gruppernes skriftlige besvarelser i forbindelse med elevernes arbejde med sætningsuddraget fra Euklids sætning 6, bog IV, som episode 2 også omhandler. De to sekvenser er valgt, fordi de både viser potentialer og udfordringer i forhold til at lade elevernes argumenter være de fremherskende, når målet er at give dem mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, mens de arbejder med GeoGebra. Denne episode bliver hovedsagligt analyseret med udgangspunkt i distinktionerne mellem regel- og strukturopfattelse samt den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen.

[28] Her gælder det samme som i fodnote 22. Delelementer fra sekvensen er præsenteret på Norma 20 med udgangspunkt i den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002) samt i Sfards (2008) teori om commognition med fokus på objekt-level rules og meta-rules. Denne sekvens indgår ligeledes ikke i paperet Thomsen (2021).

*Sekvens 1 – Forskellige argumenter i klassen*

På det her tidspunkt, hvor opsamlingen finder sted, synes eleverne at være ved at være trætte, hvilket måske også kan anes i opsamlingen. Samtidig vurderes det ikke, at det på den måde har konsekvenser for udfaldet af samtalen, men det havde betydning for, hvor "langt" samtalen kunne drives. Opsamlingen kommer inden for samme undervisningsgang i forlængelse af, at eleverne har arbejdet med deres screencasts og skriftlige besvarelser, så opsamlingen bygger ikke som sådan herpå, men på det, der er og kommer frem i klasselokalet undervejs i arbejdet hermed.

Læreren sidder ved det fælles smartboard og har åbnet GeoGebra, hvori den konstruerede halvcirkel med indtegnede vinkler er på.

| Billede 1 | Billede 2 |
|---|---|
|  |  |

*Figur 24: Billede – Eksempel på figur i de fælles opsamling.*

*Argument a – Vi rykker på trekanten*

Her argumenterer en elev med, at der kun rykkes på trekant BAD og ikke i vinkel BAD:

L: OK, hvis vi lige prøver at kigge. Han påstår altså, at hvis man laver den (figuren) på den måde. En vinkel fra en halvcirkel og en halvcirkel er her (peger) så vil den altid være ret heroppe. Er det rigtigt?
(…)
L: Hvordan kan vi se det?
E1: Fordi at vi rykker jo kun på trekanten, vi rykker jo ikke på vinklen.
L: (Hiver i punktet på halvcirkelperiferien og kører det rundt på periferien) Nej, så vi rykker på trekanten, hmmm… Kan vi prøve at komme ind på, hvorfor det er sådan? Udover at vi rykker på trekanten. Et bud på, hvad det er, der sker, siden det passer?

E1 siger: "Fordi at vi rykker jo kun på trekanten, vi rykker jo ikke på vinklen." Hvortil lærerens "hmm" og de efterfølgende udsagn synes at være et udtryk for, at læreren prøver at signalere, at det ikke er et helt gyldigt svar. Umiddelbart kan man sige, det måske alligevel kommer til at fremstå som et gyldigt svar for flere elever, fordi læreren her trækker i punktet på halvcirkel-periferien. Lærerens brug af GeoGebra kan her siges at risikere at medføre enten en pragmatisk eller en retfærdiggørende mediering, fordi de ikke får gået mere ind i udsagnet samtidig. Selvom de ikke går dybere ind i argumentationen, kan dette elevudsagn tolkes som, at eleven her bruger den undersøgende side af ræsonnementskompetencen til at forstå udsagnet og enten forestille sig eller trække på erfaringerne fra gruppearbejdet, hvordan det kan vises i GeoGebra. Derpå drager eleven en slutning, nemlig at der kun rykkes i trekanten – ikke i vinklen. Det er uvist om eleven med udtrykket "rykker" mener, at man flytter trekanten, således at trekanten rent faktisk forbliver at være den samme trekant, og at diameteren bliver den, der "trækkes" langs cirkelperiferien. Eller mener E1, at det er trekantens toppunkt på cirkelperiferien, der "rykkes" i således, at trekanten ændrer sig, men ikke vinklen? Det synes at være lærerens tolkning, eftersom punktet hives rundt langs halvcirkelperiferien. Her kunne læreren have sat længder på siderne af trekanten og have flyttet punktet rundt på halvcirkelperiferien og spurgt til, hvad det vil sige, at vi rykker på trekanten. Hvad forbliver det samme og hvad ændrer sig? Hvordan kan vi rykke på punktet uden at rykke på vinklen? Hvad var der sket, hvis vi havde en trekant, der ikke var bundet af en halvcirkelperiferi, ville de trekanter, der kom ud af at trække i punktet, have samme vinkler? Hvorfor/hvorfor ikke? E1s udsagn: "Fordi at vi rykker jo kun på trekanten, vi rykker jo ikke på vinklen" er yderligere interessant, fordi det på den ene side kun kan siges inden for "sprogrammen" af GeoGebra. Figuren synes at være dynamisk for eleven og ikke som at bestå af et uendeligt (med de begrænsninger programmet har) antal forskellige trekanter. Her kunne originalkilden være brugt mere aktivt til at imødekomme og diskutere en forståelse af forskellige figurer i GeoGebra, når der arbejdes med den dynamiske del heraf. I forhold til distinktionen mellem regel- og strukturopfattelse kan det hævdes, at dragging kræver en særlig opmærksomhed, fordi man kan risikere, at den dynamiske del af geometriprogrammet bliver en del af en regelforståelse, en dynamisk definition af geometriske figurer. Samtidig fordrer dragging, at der lægges op til en forståelse af, hvad der sker med de geometriske figurer, når der hives i dem – altså en implicit strukturopfattelse, hvis det bruges refleksivt.

*Argument b – Man kan se det i GeoGebra*

Undervejs i den fælles opsamling bliver det sagt to gange, at man kan se det. Udsagnene lyder som følger:

E: Man kan se det på filmen.
E: Du kan også bare trykke play, så skifter den af sig selv.

Igen kan det være svært at vurdere, om der er tale om en pragmatisk eller retfærdiggørende mediering. Det er jo rigtigt, at man kan se, vinklen vedbliver med at være 90 grader, når punkt

A føres rundt langs cirkelperiferien, men forklaringen vedbliver ligeledes at være, at påstandens gyldighed understøttes af en visualisering i GeoGebra. Samtidig kan sådanne udsagn som blot at bruge visualiseringen være et udtryk for en accept af og "tro" på, at "når computeren viser det, må det være rigtigt" – og så behøves en yderligere forklaring, argumentation, ikke. En sådan brug af GeoGebra kan også karakteriseres som en statisk læsning af GeoGebra, måske ikke af originalkilden, men af GeoGebra. I begge tilfælde bliver læreren ved med at udfordre disse svar, således at eleverne bliver nødt til at prøve at ræsonnere yderligere.

*Argument c – Når vinklen i den ene trekant bliver mindre, bliver den tilsvarende større i den anden*

Et tredje argument der fremføres i den fælles opsamling går på, at vinklen i den ene trekant bliver tilsvarende større eller mindre end i den anden trekant, hvis man trækker punktet A langs cirkelperiferien.

L: Er der nogen, der har nogle bud på, hvorfor det er sådan? E3.
E3: Altså, hvorfor den stadig er retvinklet?
L: Ja.
E3: Fordi, at når du rykker den til den ene side, bliver den ene større, men den anden bliver også mindre.
L: Så man kan se her (peger op på de to trekanters topvinkler). Det kan godt være, at den der bliver større, men den der bliver også tilsvarende mindre.

Her synes GeoGebra at have udgjort en epistemisk mediering i forhold til den pågældende elev. I hvert fald i forhold til det, de diskuterer lige her, men man kan også sige, at det afsporer en epistemisk mediering i forhold til Euklids tekst, og det der skulle bevises i relation hertil. Det skyldes måden de tilhørende opgaver var designet på samt den konstruktion eleverne blev bedt om at arbejde ud fra. Det kunne have haft potentiale til en videre diskussion, som så skulle have været ført tilbage til selve teksten igen. I næste argument kommer de til en vis grad lidt tættere på.

*Argument d – De er ligedannede*

Her begynder en elev at tale om ligedannethed:

L: (…) Hvad med de der to vinkler, kan vi sige noget om dem? Den vinkel hernede og den vinkel heroppe? Kan vi sige noget om dem … overhovedet. Prøv lige at holde øje med dem
E6: Vi kan ikke engang se tallene.
L: Kan I ikke se tallene, så er det selvfølgelig svært (kører vinklen rundt på halvcirkelperiferien).
(…)
L: (Peger på vinklen nederst til højre – billede 2). Her står 33,71 (flytter punktet igen). Hvis vi kigger på de her tal, kan vi så se noget (peger også på topvinklen i samme trekant). Ej, det er måske svært at se fra jer.
E7: Er de det samme?
L: Er de det?
(…)

L: (Peger igen på figuren) Den der er den samme som den der?
E9: Ja de er ligedannede.

Her er det lidt svært at gennemskue, om E9 hentyder til, at de to trekanter (startpunktet) er ligedannede, eller om det er de to vinkler i de ligebenede trekanter, som læreren peger på. Umiddelbart synes det som om, det var det sidste. Efterfølgende taler de lidt videre om det, men kommer ikke nærmere i forhold til at ræsonnere i forhold til de øvrige vinkler i trekanterne og dermed ikke en argumentation for, hvorfor vinkel BAD altid er 90 grader i en indskreven trekant i halvcirkel BAD. De kommer heller ikke nærmere ind på, hvorfor det kunne være et argument, at de to trekanter i udgangspunktet var to ligedannede retvinklede ligebenede trekanter, hvorfor de to vinkler ved vinkelbenene ville være halvdelen, nemlig 45 grader og to gange 45 grader bliver 90 grader. Selvom det ikke blev ført videre, kan man her hævde, at dragging og vinkelmålerværktøjet i GeoGebra anes at udgøre en epistemisk mediering. Eleven begynder at inddrage ligedannethed i en matematisk argumentation, hvilket også kan siges at udvide opsamlingen til at tage en drejning mod en overvejende strukturopfattelse.

*Argument e – Cirklens størrelse gør ingen forskel*

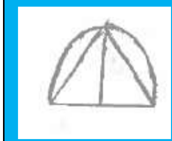
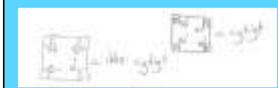
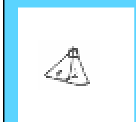
Den fælles opsamling afsluttes med, at de taler om, hvilken betydning cirklens størrelse har for vinkel BAD.

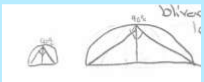
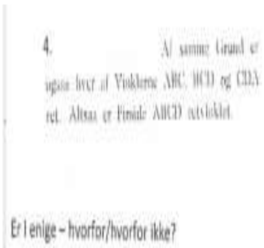
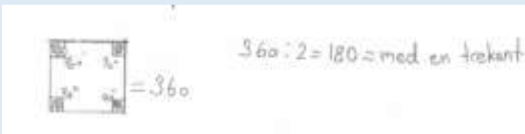
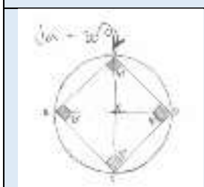
L: Ja, hvad hvis den nu havde været dobbelt så stor.
(…)
E3: Det gør jo ikke nogen forskel, så bliver vinklerne, ikke vinklerne, men stregerne, så bliver de også bare større.

På det her tidspunkt er klassen ved at være godt trætte og miste tålmodigheden, da tiden også er gået, hvorfor de ikke afprøver udsagnet, men stopper opsamlingen. E3 udviser en forståelse for, at vinklerne i figurerne forbliver de samme uagtet, at figurerne gøres større. Det kan skyldes en bevidsthed i forhold til at forstørre og mindske figurer i GeoGebra. Det kan også have baggrund i arbejdet med forudsætningerne 1, 2, 3, og 4 tidligere i forløbet.

*Sekvens 2 – De skriftlige besvarelser*

I dette afsnit præsenteres et skema, der viser de forskellige typer af argumenter og ræsonnementer, eleverne skriver i deres skriftlige besvarelser. Det giver ikke et klart billede af den dialog, der ligger forud for og undervejs i besvarelsen, hverken eleverne imellem og mellem eleverne og læreren. I skemaet er de argumenter, der ligger tæt op ad hinanden talt sammen. I de tilfælde, hvor der er flere end en besvarelse, bliver besvarelserne ikke gengivet helt korrekt, men samlet under en fælles beskrivelse af svarenes indhold. Skemaet er ligesom de foregående præsentationer af makkerparrenes/gruppernes skriftlige besvarelser inddelt efter de fire forskellige dele af den opgave, dette nedslag omhandler.

| | Svar – typer af argumenter<br>Illustrationer | Antal |
|---|---|---|
| <br>3. Jeg siger ... nu, at den ogsaa er ret-vinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er ∠ BAD ret.<br>Undersøg i GeoGebra:<br>Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det? | Vi brugte vinkelmålerfunktionen i GeoGebra<br> | 6 |
| | Ja det passer, fordi vi ville jo lave figuren og sådan kan man se det. | 1 |
| | Det passer fordi hvis vi tænker det er en firkant så vil alle vinkler være 90 grader og vores to trekanter er bare en halv firkant<br> | 1 |
| | BD er rigtigt man kan fx sætte resten af cirklen sammen så kan man se det | 1 |
| Hvorfor gælder det eller gælder det ikke? | Det gælder fordi vi prøvede og så var det rigtigt/du kan se det/ja det gælder. | 3 |
| | Det gælder, fordi det er et halvt kvadrat, og derfor er vinkel BAD ret, fordi alle vinkler i et kvadrat er rette. | 2 |
| | Fordi man ikke kan have et kvadrat uden at 4 vinkler måles med 90 grader<br> | 1 |
| | Ja fordi når to trekanter går ind i hinanden bliver der lavet en ret vinkel.<br> | 1 |
| | Det gælder fordi at det er en halv kvadrat og at Ab og d er det samme på den anden side.<br>Det gælder fordi det er et halvt kvadrat og derfor er vinkel BAD ret fordi alle vinkler i et kvadrat er rette. Det kan også være fordi der er to rette vinkler og så er de øverste 45 grader og tilsammen giver de 90 grader og 90 grader er en ret vinkel. | 1 |
| | Svarer i forhold til diameteren – BD er rigtig fordi den går igennem halvcirklen | 1 |
| | Svarer ikke | 1 |
| Vil det altid være sådan i en halvcirkel? | Vi har vist det på computeren/Ja fordi sådan vil det altid være | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis. |  | |
| | Du ~~laver~~ kan altid lave en cirkel og putte et kvadrat i den og i et kvadrat er alle vinkler 90 grader og hvis du halverer den så vil vinklen stadig være 90 grader. | 1 |
| | Ja – alle vinkler på et kvadrat er 90 grader, og hvis det ikke var et indskrevet kvadrat ville der ikke være nogle vinkler.<br><br>Man kan se (ABCD) at alle vinklerne er 90 grader så må vinkel BAD også være det. | 1 |
| | Ja det vil altid være sådan, fordi i en cirkel vil der altid passe ét kvadrat. Derfor i en halvcirkel vil der altid være plads til to trekanter.<br> | 1 |
| | Ja, fordi alle halvcirkler er ens. Hvis halvcirklen bliver større bliver linjerne også større.<br> | 1 |
| | Hvis cirklen er lige, fordi det ville ikke virke i en oval. | 1 |
| | (Svarer ikke) | 1 |
|  4. Af samme Grund er ogsaa hver af Vinklerne ABC, BCD og CDA ret. Altsaa er Firside ABCD retvinklet.<br><br>Er I enige – hvorfor/hvorfor ikke? | Ja fordi en kvadrat vil altid have 4 rette vinkler på 90 grader.<br>Tegning af et kvadrat med 4 rette vinkler = 360 grader<br>360:2=180=med en trekant<br>  | 1 |
| |  | 1 |
| | Hvis alle vinklerne er rette, så er det ikke en trekant der skal alle vinklerne give 180 grader | 1 |
| | Ja fordi det er det samme bare med andre navne. | 1 |
| | Ja fordi vi lige har vist det/ja | 2 |
| | Har ikke svaret på denne del | 3 |

*Figur 25: Skema over gruppernes besvarelse på opgaveark (figur 16). Opgavearket består af tekstbidder fra Euklids sætning 6, bog IV (Eibe 1897b, s. 73) samt spørgsmål.*

De fire delelementer af opgaven bliver analyseret i den rækkefølge, de har stået på elevernes opgaveark og står i skemaet.

Det første spørgsmål er knyttet til denne tekstbid af Euklids sætning 6, bog IV: “Jeg siger saa, at den ogsaa er retvinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er [vinkeltegn] BAD ret.” (Eibe, 1987b, s. 73). Spørgsmålet eleverne bliver bedt om at besvare lyder: “Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det i GeoGebra?” Her svarer 6 makkerpar, at de brugte vinkelmålerfunktionen i GeoGebra og 1 makkerpar, at de har lavet figuren i GeoGebra, og derfor kan man se det. Disse 7 besvarelser kan karakteriseres som værende tegn på, at GeoGebra har haft en pragmatisk medierende funktion, som yderligere kan siges at knytte sig til det Harel og Sowder (2007) kalder der empiriske perceptuelle overbevisningsskema. De kan også være udtryk for, at elevernes arbejde med GeoGebra har haft en retfærdiggørende mediering på eleverne, eftersom de ikke uddrager mere heraf end, at de har vist det i GeoGebra. De 2 sidste besvarelser nævner ikke GeoGebra. I det ene svar skriver eleverne “Det passer fordi hvis vi tænker det er en firkant så vil alle vinkler være 90 grader og vores to trekanter er bare en halv firkant”. Her begynder eleverne med afsæt i deres figur og arbejde i GeoGebra at argumentere. I makkerparrets screencast starter eleverne med at konstatere, at vinklerne ved cirklens centrum i de to små trekanter begge er rette. Derefter spørger de, om det så også gælder for vinkel BAD (i deres screencast peger de på vinklerne og tegner i deres GeoGebra-vindue). De bruger måleværktøjet i GeoGebra til at afklare det og taler derefter om vinkelsummer i kvadrater og trekanter. De afslutter screencasten med bl.a. at tale om, at de skriver ned bagefter. Makkerparret argumenterer med udgangspunkt i firkanten og inddrager ikke cirklen, men alligevel synes det at kunne betragtes som en epistemisk mediering i form af, at der tegner sig et begyndende forsøg på at argumentere og knytte argumenter sammen. Det kan karakteriseres som et billede på en udvikling af et begyndende transformerende overbevisningsskema (Harel & Sowder, 2007). Her bruger eleverne også den produktive side af deres ræsonnementskompetence samt arbejder ud fra en strukturopfattelse, hvor de ser på strukturerne mellem kvadrater, halve kvadrater og trekanter. I den sidste besvarelse: “BD er rigtigt man kan fx sætte resten af cirklen sammen så kan man se det”, synes eleverne at fokusere på diameteren og argumenterer derefter med udgangspunkt i, at man kan se det, hvis man sætter en halvcirkel mere på. I makkerparrets screencast er punktsætningen på deres figur også medvirkende til deres svar. De får sat punkterne A, B og D på figuren, så det passer til teksten, men de sætter “centrum” til at være c, hvilket giver dem nogle udfordringer i forhold til deres forklaringer. Det kan være en forklaring på deres besvarelse. De måler vinkel BAD med vinkelværktøjet og taler bl.a. om, at vinkel BAD er ret, fordi det ville den ikke være, hvis firkanten var i en oval. Det afprøver de ikke i GeoGebra, men taler ud fra det. De sætter også vinkelmål på en af de andre vinkler og læser alle spørgsmål igennem, hvilket giver anledning til, at de også taler om, at alle vinkler ikke kan være rette i en trekant. Her passer deres punktsætning ikke til teksten, hvilket ses tydeligst i deres skriftlige besvarelse på det sidste spørgsmål, fordi i deres figur er hverken vinkel ABC og CDA rette. Elevernes svar på det sidste spørgsmål lyder: "Hvis alle vinklerne er rette, så er det ikke en trekant der skal alle vinklerne give 180 grader". Her kan det være svært at vurdere, hvilken mediering elevernes arbejde med GeoGebra udgør. Det synes umiddelbart at skifte mellem en pragmatisk og epistemisk medierende funktion i den forstand, at de bruger GeoGebras måleværktøj til at slå fast, at det gælder og derudfra begynder de at argumentere. Deres argument i forhold til, at BD er diameter og at det ikke ville gælde i en oval, kan måske også ses i forhold til, elevernes tidligere arbejde i forløbet. I elevernes arbejde med sætning 6, bog IV, har de bl.a. arbejdet med at konstruere et indskrevet kvadrat i en given cirkel. Ligesom de har arbejdet med parallelogrammer med udgangspunkt i titlen på sætning 34, bog I: "*I et parallelogram er de modstående sider og vinkler indbyrdes lige store, og diagonalen halverer parallelogrammet."* (Eibe, 1897a, 49). Måske er sidstnævnte baggrunden for, at eleverne i screencasten taler om ovaler. I givet fald kan elevernes tidligere arbejde siges at understøtte, at deres arbejde med GeoGebra i forhold til den nuværende opgave kan udgøre en epistemisk medierende funktion. Det synes også at være den produktive side af ræsonnementskompetencen, der er i spil, eftersom det er koblinger og argumenter, eleverne selv finder på. Det kan også ses som et resultat af, at eleverne arbejder ud fra en strukturopfattelse.

Til spørgsmålet: "Hvorfor gælder det/gælder det ikke" svarer tre makkerpar, at det gælder, fordi de prøvede det og kunne se det. Her synes elevernes arbejde med GeoGebra endnu engang at udgøre en pragmatisk mediering i form af en aktivering af et empirisk, perceptuelt overbevisningsskema. Ligesåvel som de også kan tolkes som værende udtryk for en retfærdiggørende mediering. De resterende svar henviser heller ikke her eksplicit til GeoGebra, men svarene er opstået i tilknytning til elevernes arbejde med GeoGebra. 3 af svarerne knytter sig til reglerne omkring rette vinkler i et kvadrat. Fælles for argumenterne er, at de knytter sig til elevernes kendskab til reglerne i et kvadrat og kan karakteriseres som værende generelle og ikke knytte sig til enkelte eksempler. I disse skriftlige besvarelser, inddrager eleverne ikke cirklen, de øvrige vinkler eller andet, men alligevel kan argumenterne karakteriseres som gyldige. Her synes elevernes arbejde med GeoGebra at udgøre en epistemisk mediering. Eleverne gør brug af den produktive side af deres ræsonnementskompetence og ser på strukturerne mellem halve og hele kvadrater. Der er to argumenter, der vedrører trekanter, de er hhv. beskrevet i episode 2, sekvens 2 og 3.

Det tredje spørgsmål lyder: “Vil det altid være sådan i en halvcirkel? Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis.” Her er der igen 3 makkerpar, der argumenterer med, at det altid vil være sådan, fordi de har vist det på computeren. Én af disse grupper har det som deres gennemgående svar til de første tre spørgsmål, hvilket kan tyde på en retfærdiggørende mediering. Der er 3 ræsonnementer, der omhandler cirkler og kvadrater. De kan ses som et udtryk for, at eleverne har brugt den produktive side af ræsonnements-kompetencen i forhold til at sætte deres egne ræsonnementer sammen. De forsøger at sætte en kæde af argumenter sammen. Besvarelserne kunne have haft en større grad af præcisering, og der kunne være inddraget flere faktorer i deres argumenter, men alligevel vurderes det som, at elevernes arbejde med GeoGebra har haft en epistemisk medierende funktion. Disse ræsonnementer kan også karakteriseres som at tage afsæt i en strukturopfattelse, hvor eleverne forsøger at arbejde med de bagvedliggende strukturer, relationer mellem de forskellige objekter i deres figur. Det ene af de argumenter, der omhandler cirkler er understøttet af en tegning af to halvcirkler, en mindre og en større. Fælles for begge er, at det “halve kvadrat” er indtegnet på begge. Den rette vinkel er ligeledes angivet herpå, hvilket indikerer, at der i deres argument implicit ligger, at det at formindske og forstørre cirklen ikke påvirker vinkelstørrelsen.

Det sidste spørgsmål knytter sig til en ny tekstbid af Euklids tekst. Den lyder som følger: “Af samme Grund er ogsaa hver af Vinklerne ABC, BCD og CDA ret. Altsaa er Firside ABCD retvinklet” (Eibe, 1897b, s. 73). Spørgsmålet, der knytter sig hertil, lyder: “Er I enige – hvorfor/hvorfor ikke?” Hertil er der tre makkerpar/grupper, der ikke har svaret. Det kan skyldes, at de ikke nåede det. Dertil kommer, at formuleringen “enige” også i højere grad kan lægge op til, at eleverne svarer ud fra en værdiladet afvejning, hvilket syntes at gøre sig gældende i episode 2 sekvens 3, i stedet for en matematisk forholdende sig til tekstbidden. Det kan også skyldes, at eleverne ikke nødvendigvis sidder med hele figuren foran sig, eftersom de her har arbejdet med halvcirklen. De har tidligere arbejdet med hele figuren, men det lægger spørgsmålet ikke eksplicit op til, at de skal vende tilbage til. Det synes som om makkerparret, der svarer: “Hvis alle vinklerne er rette, så er det ikke en trekant, der skal alle vinklerne give 180 grader”, netop ser denne tekstbid og det tilhørende spørgsmål som, at det relaterer sig til den halvcirkel, de arbejder med (jf. tidligere gengivelse af screencast under første spørgsmål). Hvilket man ikke kan fortænke dem i. På den baggrund er deres svar ganske plausibelt og GeoGebra synes at spille en epistemisk medierende rolle. Dette svar kan også ses, som tagende udgangspunkt i en strukturopfattelse, hvor eleverne knytter viden omkring vinkler i trekanter til deres figur. Man kan sige, de overser eller forholder sig ikke til, at Euklid taler om 4 rette vinkler. Det synes de to sidste makkerpar til gengæld at forholde sig til. Det er interessant, at begge disse grupper supplerer med en tegning, hvilket muligvis skyldes, at de her viser overgangen fra deres computerskærm, hvor de arbejder med en halvcirkel til, at de her svarer i forhold til helcirklen og kvadratet, de tidligere har arbejdet med. Det andet makkerpar svarer ydermere: "Ja fordi en kvadrat vil altid have 4 rette vinkler på 90 grader". Hvilket de supplerer med en tegning af et kvadrat med 4 rette vinkler, hvor der står "= 360 grader -360:2=180=med en trekant". Her viser deres tegning, at de har blik for strukturen mellem kvadratet og trekanten, og dermed kan deres svar sammenholdt med deres tegning ses som, at makkerparret bruger deres produktive side af ræsonnementskompetencen. Det kan også tolkes som, at GeoGebra her har en epistemisk medierende funktion.

De skriftlige besvarelser viser igen, at eleverne bruger forskellige argumenter med udgangspunkt i deres arbejde med GeoGebra samt at en punktsætning i havlcirklen, der ikke stemmer overens med teksten i originalkilden, giver anledning til udfordringer og forvirring for nogle elever. Deres svar kan synes at basere sig herpå. Afslutningsvist kan det også være værd at fremhæve, at de skriftlige besvarelser med fordel kan understøttes af udfoldelsen af besvarelserne i form af screencasts.

#### 6.2.4. Opsamling på case 2

I dette afsnit gives der først en mere generel opsamling på episoderne i case 2 i forhold til opgaven og introduktionen hertil. Derefter præsenteres nogle af fundene i punktform i forhold til det videre arbejde med at formulere didaktiske principper og der gives eksempler på, hvordan der muligvis kunne have været taget andre didaktiske tiltag i brug. Afslutningsvist gives nogle opsamlende vurderinger af muligheder og udfordringer i forhold til at skabe grobund for at understøtte eleverne i at udvikle deres historiske bevidsthed.

Målet med forløbet var at give eleverne mulighed for at indgå i en dynamisk læsning af teksten. Som beskrevet i indledningen til denne opgave, lagde uddraget af sætning 6, bog IV (episode 2 og 3), i nogen grad i sig selv op til det, fordi denne del ikke begrundes i sætningen. Her var tanken dog, at eleverne kunne trække på deres tidligere arbejde med forudsætningerne samt med den foregående del af Euklids sætning 6, bog IV, således at de kunne indgå i en dynamisk læsning af GeoGebra i samspillet med originalkilden med henblik på selv at finde på argumenter for, hvorfor vinkel BAD er ret. Med udgangspunkt i Niss og Jensens (2002) definition af ræsonnementskompetencen, er det tydeligvis forskelligt, hvordan grupperne har arbejdet med både forudsætningerne og uddraget af sætning 6, bog IV, hvilket også var meningen med opgaverne og undervisningsforløbet. Nogle af eleverne har fået et indblik i dele af de bærende ideer i beviset og er så småt på vej til at formulere kæder af argumenter. Nogle sætter deres lid til, at de har vist det i GeoGebra og går ikke som sådan yderligere ind i at eksplicitere de bærende ideer via argumenter. Ligesom andre bruger den produktive side af deres ræsonnementskompetence og selv producerer argumenter og kæder heraf i forbindelse med deres arbejde med GeoGebra. Her er det vigtigt at pointere, at læreren ofte synes at have en helt afgørende rolle i forhold til at spørge ind til forskellige ting og hjælpe eleverne på sporet af at arbejde med de bærende ideer samt at understøtte, at eleverne bruger den produktive side af deres ræsonnementskompetence og kan indgå i en dynamisk læsning af både originalkilde og GeoGebra.

I forhold til Mellin-Olsens (1984) distinktion mellem regel- og strukturopfattelse skulle forløbet og de tilhørende opgaver gerne lægge op til, at der var mulighed for at indsnævre og udvide strukturerne i forhold til de argumenter, eleverne tog udgangspunkt i. Det synes også at være tilfældet i forhold til elevernes arbejde med uddraget af sætning 6, bog IV. Generelt kan man sige, at makkerparrene så småt begyndte at se på nogle af strukturerne mellem ligebenede trekanter, ligebenede retvinklede trekanter, kvadrater og cirkler. Her synes nogle af opgaveformuleringerne og punktsætningen i forhold til arbejdet med halvcirklen bl.a. at være et benspænd – samtidig synes der også at være nogle muligheder i arbejdet med halvcirklen. Igen var lærerens spørgsmål og dialoger med eleverne også ofte helt afgørende for, at eleverne fik sat ord på deres argumenter samt at de kunne arbejde videre, at de fik blik for nogle af strukturerne.

Målet med opgavedesignet i episode 2 og 3 var bl.a., at GeoGebra skulle have mulighed for at have en medierende funktion i form af de tre former for medieringer, som Misfeldt og Jankvist (2018) definerer. Det kunne bl.a. ske i kraft af, at eleverne kunne trække i punktet A, måle vinklerne og linjestykkerne samt sammenligne disse. Her kunne eleverne bl.a. trække på deres tidligere arbejde fra episode 1, hvor de havde arbejdet med at forlænge og forkorte linjestykker samt at forstørre og formindske cirkler i GeoGebra. Målet var ikke i sig selv, at GeoGebra hele tiden skulle have en epistemisk medierende funktion, men at det kunne veksle mellem, hvilken medierende funktion GeoGebra havde. Igen synes det som om, at læreren spillede en afgørende rolle i forhold til at understøtte mulighederne for, at GeoGebra kunne have en epistemisk medierende funktion og også en væsentlig rolle i at understøtte en pragmatisk mediering. Fælles for episode 2 og 3 er, at læreren flere gange giver et hint om at se på de to trekanter. I episode 3 sekvens 1 er det også læreren, som giver et hint i forhold til at måle de øvrige vinkler i de to trekanter og se, hvad der sker med dem, når punkt A flyttes langs cirkelperiferien. Eleverne kan dog ikke rigtigt se vinkelstørrelserne og derfor gives der ikke den optimale situation for, at GeoGebra kan have en pragmatisk medierende funktion, som efterfølgende kunne udvikle sig til en epistemisk medierende funktion i så fald, at de relaterede denne viden til de to retvinklede, ligebenede trekanter, konstruktionen af kvadratet med to på hinanden oprettede vinkelrette diametre osv.

På baggrund af analyserne af episode 1 er det særligt værd at fremhæve følgende ting i forhold til at have fokus på en dynamisk læsning samt at tage afsæt i tankegangskompetencen med henblik på at understøtte elevernes udvikling af ræsonnementskompetencen. Det synes at understøtte, at eleverne kan:

- indgå i en dynamisk læsning af de fem forudsætninger, når de bliver sat i situationer, hvor de selv kan afprøve, hvordan de forstår indholdet heraf i GeoGebra.
- deltage i en fælles dialog i klassen om de fem forudsætninger, hvor de bl.a. kan trække på deres egne erfaringer fra arbejdet i GeoGebra.
- stille spørgsmål til muligheder og begrænsninger i forhold til at konstruere geometriske former i GeoGebra, når de selv arbejder hermed i samspillet med de fem forudsætninger.

Det synes også som, at læreren får mulighed for:

- at kunne bruge teksten i forudsætningerne samt mulighederne for at visualisere disse i GeoGebra til at aktivere elevernes brug af tankegangskompetencen i sin dialog med eleverne.
- i fælles diskussioner i klassen at kunne trække på de typer af opmærksomheder, problemer, der har indgået i dialoger, læreren enten selv har haft med elever eller har observeret, at eleverne har haft indbyrdes med hinanden undervejs i deres arbejde med samspillet mellem forudsætningerne og GeoGebra.

Arbejdet med forudsætningerne havde i denne situation til formål at understøtte elevernes senere arbejde med Euklids sætninger og i den forbindelse at understøtte elevernes udvikling af ræsonnementskompetencen.

På baggrund af analyserne af episode 2 og 3 synes det skabe rum for, at GeoGebra kan have en hhv. pragmatisk og epistemisk medierende funktion, at understøtte elevernes mulighed for at udvikle både deres produktive side af deres ræsonnementskompetence og deres strukturopfattelse, når:

- der er støtteopgaver til de forskellige tekstbidder af originalkilden, som lægger op til, at eleverne skal forklare og formulere deres egne argumenter og ræsonnementer. Her er det formentligt ikke så hensigtsmæssigt, fx at spørge til om eleverne er enige, hvis målet er at understøtte udvikling af deres matematiske ræsonnementskompetence.
- eleverne har mulighed for at arbejde med både mundtlige og skriftlige besvarelser samt tegninger, der understøtter deres ræsonnementer og formuleringer heraf.
- punkterne i elevernes GeoGebra-kontruktioner er sat rigtigt i forhold til teksten i original-kilden

Lærerens dialog med eleverne er ofte afgørende i forhold til at understøtte; 1) at GeoGebra kan spille en pragmatisk og epistemisk medierende funktion, 2) at eleverne får mulighed for at udvikle både den undersøgende og produktive side af deres ræsonnementskompetence samt 3) at eleverne arbejder ud fra en strukturopfattelse. Her synes nogle af kendetegnene at være, at læreren:

- i introduktionen selv viser, hvordan en figur skal konstrueres i GeoGebra, hvis den er det afsæt, eleverne skal arbejde med udgangspunkt i. Her er det vigtigt, at placeringen af alle punkter tydeliggøres og også tjekkes på elevernes computerskærme efterfølgende, før de går i gang med opgaven.
- er opmærksom på de bærende ideer i ræsonnementerne eller beviset, således at disse kan bringes i spil i dialogerne med eleverne.
- går i dialog med eleverne, både når de arbejder i makkerpar, grupper, individuelt og i fælles opsamlinger i klassen, stiller opklarende spørgsmål og giver "spørgende" hints til, hvordan makkerparrene kan komme videre med nogle af de bærende ideer, der tager afsæt i det arbejde eleverne er i gang med, når dialogen starter. Læreren bruger vendinger som:
  "Gælder det? Hvorfor er det sådan?", "Har I undersøgt det? Passede det?", "Kan vi på en eller anden måde forklare?", "Kan vi prøve at komme ind på noget, hvor at vi siger, det er det fordi… et eller andet?", "Så, hvad var opgaven her. Hvordan vil I undersøge det?", "Hvordan kan vi se det?", "Et bud på, hvad det er, der sker, siden det passer?", "Kan man på en eller anden måde få noget hjælp ved at (…). Jeg ved ikke, om det hjælper eller det forvirrer?", "Jeres opgave er nu at prøve at argumentere for…"

Vendinger, der både synes anerkendende for det arbejde, eleverne er i gang med og samtidig prøver at få dem videre – uden at give dem svaret eller blot forvente, at de giver et svar. Læreren understøtter på den måde eleverne i selv at komme på banen i forhold til at formulere deres egne argumenter.

I forhold til episode 2 sekvens 1 synes det, som om eleverne kunne have haft en anden dialog og mulighed for at ræsonnere, hvis de fra starten havde navngivet punkterne, så de stemte overens med teksten, eller at de var bedt om at vende tilbage til deres argumenter, når de var blevet klar over nogle af årsagerne til deres tvivl i første screencast. Det synes at være en vigtig faktor at være opmærksom på som lærer samt opgave- og forløbsdesigner. Her kunne der evt. være startet med, at makkerparrene to og to sammen skulle tjekke hinandens figurer for punkternes placering på figurerne på deres computerskærme i forhold til punkternes placering i forhold til figuren i originalkilden. På dette tidspunkt kunne illustrationen fra originalkilden med fordel være sat ind i opgaven (se figur 15). Dertil kommer, at der på dette tidspunkt med fordel kunne have været arbejdet med en systematik omkring lærerens hjælp til grupperne, således at det sikredes, at alle makkerpar kom i en kort dialog med læreren, hvor de beskrev deres tilgang til opgaven og læreren kunne stille opklarende og udfordrende spørgsmål i forhold til at understøtte makkerparrenes videre arbejde henimod at formulere ræsonnementer. Det kunne muligvis også have været en fordel at arbejde med delelementer fra elevernes screencasts i de fælles opsamlinger. Her kunne de i fællesskab have diskuteret det pågældende makkerpars argumenter og nogle af de problemer eller ideer, grupperne havde undervejs i deres arbejde med opgaven. Eleverne kunne ydermere i den fælles opsamling være blevet bedt om at konstruere figurerne fra smartboardet på deres egne computere, således at de kunne arbejde med dem undervejs i den fælles opsamling. På den måde havde eleverne kunne se vinkelstørrelserne, og de kunne også have haft korte diskusioner med deres sidemakker undervejs i opsamlingen. Det kunne have understøttet, at alle elever i højere grad havde haft mulighed for at være aktive undervejs i den fælles opsamling.

I episode 3 sekvens 2 er det interessant, at nogle grupper vælger at supplere med tegninger. I nogle tilfælde kan det ses som at understøtte forklaringen, i andre er der tale om, at tegningen udgør en yderligere forklaring. Elevernes egne tegninger synes at være en repræsentation, vi med fordel kunne have arbejdet mere systematisk med. Det synes umiddelbart også som, at nogle af grupperne ikke har fundet sig helt tilpas med den skriftlige besvarelsesform. Her kunne deres arbejde med ræsonnementer måske været understøttet af, at de selv skulle producere tegninger undervejs. Ud fra Mellin-Olsens (1984) perspektiv på sprogsystemer kunne det have været hensigtsmæssigt, at billedsproget, visualiseringen, ikke nødvendigvis i så høj grad var ensidigt knyttet til GeoGebra. Det skulle i højere grad også have været koblet til elevernes eget skabende billedsprog og deres egne notationsformer samt billedsproget, illustrationen, i originalkilden. Det kunne formentligt have afværget nogle af benspændene undervejs i elevernes tilgang til opgaverne. Det kunne muligvis også have understøtte elevernes muligheder for i deres argumentationer at kunne veksle mellem halvcirkel og helcirkel, “halv kvadrat” og “hel kvadrat” samt i at kunne se relationen mellem den ene rette vinkel og de tre øvrige. Et sådant samspil mellem at arbejde med figuren i GeoGebra, illustrationen i Euklids tekst samt elevernes egne håndtegnede figurer kunne formodentligt i højere grad have bidraget til at understøtte, at eleverne fik mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence i forhold til arbejdet med samspillet mellem originalkilden og GeoGebra.

En absolut vigtig pointe i forhold til analyserne af makkerparrenes skriftlige besvarelser er, at det er tydeligt, at der ligger mange muligheder, mange begyndende ræsonnementer heri, som kunne være taget op i den fælles diskussion i klassen. Det havde helt klart været frugtbart, hvis der havde været udført en analyse af elevprodukterne, før de havde den fælles dialog i klassen. Nogle af udsagnene kunne med fordel være bragt i spil og elaboreret videre på i den fælles diskussion. Det som Drijvers et al. (2010) kalder spot-and-show orkestrering. Om det skriver de bl.a:

> In the Spot-and-show orchestration, student reasoning is brought to the fore through the identification of interesting DME student work during preparation of the lesson, and its deliberate use in a classroom discussion. Besides previously mentioned features, a didactical configuration includes access to the DME during lesson preparation. As exploitation modes, teachers may have the students whose work is shown explain their reasoning, and ask other students for reactions, or themselves provide feedback on the student work. (Drijvers et al. 2010, s.220)

Drijvers et al. undersøger lærerens orkestreringer i forhold til at arbejde med en applet, som er indlejret i et digitalt læringsmiljø kaldet “Digital Mathematics Environment”. Her vil jeg ikke komme nærmere ind på de særlige omstændigheder, der ligger til grund for deres undersøgelse, men blot nævne, at denne type orkestreringer i dette tilfælde formentligt kunne have kvalificeret fælles dialoger yderligere.

Måske have det også været hensigtsmæssigt, hvis opgaverne var suppleret med nogle flere hints eller andet, der kunne have ledt eleverne på sporet undervejs. Omvendt synes mange af makkerparrene også at være nået langt med udgangspunkt i denne mere åbne opgaveformulering. Spørgsmålet er, om den ikke i høj grad også medvirkede til, at eleverne fik mulighed for at arbejde med den produktive side af ræsonnementskompetencen?

Umiddelbare ændringer som med stor sandsynlighed kunne have kvalificeret understøttelsen af elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, er:

- en mere struktureret “lærerhjælp”, således at alle grupper fik mulighed for at være i kontakt med læreren
- at inddrage elevernes tegninger i højere grad og mere systematisk
- at tage udgangspunkt i en “spot-and-show” orkestrering, således at elevernes besvarelser bringes aktivt i spil i den fælles dialog.
- at udvælge et godt sted i forhold til elevernes arbejde med en udvalgt sætning fra *Euklids Elementer* og give eleverne illustrationen fra den pågældende af Euklids sætninger, således at de har mulighed for at sammenligne denne med deres egen konstruktion i GeoGebra.

Det synes at være et meget komplekst forløb, hvor der er mange nye ting i spil for elever og lærere. De skal arbejde med en originalkilde og oparbejde en fælles forståelse af, hvad det vil sige at ræsonnere matematisk. Derudover synes det som om, eleverne i denne episode trækker på deres erfaring med at arbejde med forudsætningerne, med tankegangskompetencen. Man kan stille spørgsmålet, om det overhovedet er muligt at arbejde med epistemisk mediering i form af at understøtte et aksiomatisk deduktivt overbevisningsskema, hvis man ikke forinden har arbejdet med de forudsætninger, der ligger til grund herfor, både i forhold til selve det matematiske indhold, men også i forhold til det redskab, der understøtter et ræsonnement i forhold hertil. Knytter ræsonnementskompetencen sig med andre ord særligt til tankegangskompetencen i de tilfælde, hvor der er tale om at understøtte aksiomatisk deduktive overbevisningsskemaer? Sidst, men ikke mindst, er det undervejs i analyserne af denne case blevet meget tydeligt, at det at definere de bærende ideer i ræsonnementet i beviset samt at lægge op til, at eleverne forsøger sig med at formulere kæder af argumentationer og ikke enkeltstående argumentationer synes at være særdeles vigtigt i et arbejde med at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Fremadrettet ville det formentligt være en ide at inddrage disse begreber i dialogerne med eleverne, således at man i fællesskab definerer de bærende ideer i sætningen og også tydeliggør de forskellige kæder af argumenter, der opstår undervejs i elevernes arbejde med sætningen. I Episode 1var der særskilt fokus på at få en forståelse for Euklids geometri og måde at opbygge beviser samt at argumentere på. Dette kan også karakteriseres som at skabe grobund for, at eleverne fik en forståelse for “fortidens matematik” om man så kan sige, mens arbejdet med forudsætningerne i GeoGebra og med sætning 6, bog IV, i episode 2 medvirkede til, at eleverne fik erfaring med, hvordan de kan arbejde med det samme matematiske indhold i en nutidig kontekst. Situationer som disse er med til at understøtte at eleverne kan udvikle en historisk bevidsthed som et middel til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. I episode 3 sekvens 1, altså i den fælles opsamling benyttede læreren sig af at sætte vinkelmål på alle vinklerne i trekanterne. De kunne også have arbejdet med angivelse af sidelængderne. Det kan ligesom i tilfældet med episode 2 ses som en mulighed for at arbejde med det matematiske indhold i en nutidig kontekst. Det kunne formentligt yderligere have været kvalificeret ved at have trukket tråde tilbage til det indledende arbejde omkring forudsætningerne og måderne at opbygge et bevis på i forhold til de muligheder, GeoGebra giver. Det kunne formentligt have givet anledning til forskellige refleksive dialoger eleverne imellem, hvilket kunne medvirke til at elevernes historiske bevidsthed kunne bruges som et middel til at understøtte deres ræsonnementskompetence.

## 6.3. Opsamling på teoretiske sammenhænge på tværs af case 1 og 2

I de to foregående opsamlingsafsnit, afsnit 6.1.4. og 6.2.4., er der hovedsageligt lagt vægt på mere konkrete opmærksomhedspunkter i forhold til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence og deres historiske bevidsthed. Med andre ord er der fx lagt vægt på de didaktiske overvejelser og situationer, der synes at understøtte en dynamisk læsning samt en pragmatisk og helst epistemisk mediering. Heri ligger en implicit værdisætning i forhold til de teoretiske distinktioner, der er valgt ud som analysedistinktioner i nærværende ph.d.-afhandling. Det skyldes, at det igennem arbejdet med den retrospektive analyse er blevet tydeligere, at der synes at være en forbindelse mellem begreberne: Dynamisk læsning, pragmatisk og epistemisk mediering samt strukturopfattelse, i forhold til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle både den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Dertil kommer, at det også er blevet tydeligere, at en bevidsthed om overgangene mellem de distinktionsbegreber, der ligger inden for de enkelte distinktionsspændingsfelter kan være givtig. I dette afsnit samles der på baggrund af de retrospektive analyser op på de fremtrædende sammenhænge mellem de forskellige teoretiske distinktioner, der synes at skabe rum for at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence og historiske bevidsthed. De præsenteres her som teoretiske pointer og fund, der funderes i forskellige praksissammenhænge, såsom lærerens rolle, forløbets opbygning og opgaveformuleringer. De teoretiske sammenhænge, der kan siges at være direkte fund i afprøvningerne præsenteres først i det følgende. Kapitlet afsluttes med en præsentation af de indirekte fund. Indirekte fund indikerer, at det blev tydeligt, at der var områder inden for de teoretiske distinktioner og sammenhænge herimellem, der ikke blev bragt i spil på en fyldestgørende måde i planlægningen og gennemførelsen af afprøvningerne.

### 6.3.1. Dynamisk læsning i samspil med de øvrige teoretiske distinktioner og historisk bevidsthed

I dette afsnit præsenteres fire forskellige fund i den retrospektive analyse i forhold til, hvilke teoretiske sammenhænge der synes at være imellem dynamisk læsning og de øvrige teoretiske distinktioner samt dynamisk læsning og historisk bevidsthed.

*Dynamisk læsning i samspillet mellem pragmatisk og epistemisk mediering*

Elevernes arbejde med GeoGebra kan understøtte en dynamisk læsning. Dette kan både være med oplæg fra læreren, som det kommer til udtryk i afsnit 6.1.1. eller i afsnit 6.2.2. Her synes det vigtigt, at eleverne får mulighed for at bruge funktioner i GeoGebra, som er forskellige fra dem, der er til rådighed i originalkilden. Det giver eleverne mulighed for at komme med bud på deres egne argumenter og ræsonnementer. Det ses fx i afsnit 6.1.1. sekvens 2 og 3 samt 6.1.2. sekvens 1. På den baggrund kan det også hævdes, at elevernes arbejde med dynamisk læsning i samspillet med GeoGebra kan understøtte, at GeoGebra udgør enten en pragmatisk og/eller epistemisk mediering.

*Dynamisk læsning og tankegangskompetencen*

Det synes også som om, det er givtigt at have særligt fokus på tankegangskompetencen, sådan som det fx kommer til udtryk i alle sekvenser i afsnit 6.2.1. Der arbejdes med Euklids forudsætninger i forhold til at understøtte det videre arbejde med at skabe rum for elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Arbejdet med forudsætningerne kan medvirke til, at "spillereglerne" for de forskellige muligheder for at ræsonnere i forbindelse med originalkilden eller GeoGebra kan blive italesat (se fx Thomsen & Jankvist, in press).

*Dynamisk læsning, medieringsformer og strukturopfattelse*

I afsnit 6.2.3. sekvens 2 synes alle tre medieringsformer at gøre sig gældende i elevernes skriftlige besvarelser. Nogle af elevbesvarelserne kan tolkes som, at der fandt en retfærdig-gørende mediering sted, eftersom eleverne blot henholdt sig til, at de havde vist det i GeoGebra uden yderligere forklaringer. Andre elever tog også udgangspunkt i GeoGebra og brugte det som eksempel i deres forklaringer, mens andre tog afsæt heri og prøvede at generalisere herudfra. De to sidste fremgangsmåder kan sammenholdes med en hhv. pragmatisk og epistemisk mediering og fælles for dem var, at det synes som om eleverne arbejdede ud fra en strukturopfattelse. Som udgangspunkt kan selve opgaveformuleringerne og lærerens introduktioner hertil siges at lægge op til en dynamisk læsning af kilden. Det synes som om, der kunne have været lagt op til en yderligere dynamisk læsning og en understøttelse af muligheder for, at elevernes arbejde med GeoGebra i højere grad kunne udgøre en epistemisk mediering, hvis der også i opgaverne havde været en yderligere guidning, der havde taget afsæt i mulige struktursammenhænge, arbejdet med GeoGebra kunne have synliggjort.

*Dynamisk læsning og historisk bevidsthed*

Det er vigtigt, at eleverne får en forståelse for at kunne "læse" originalkilden, før de kan indgå i en mere selvstændig læsning og arbejde med problemstillingerne heri. GeoGebra kan i den forbindelse have en understøttende funktion. Det ses fx i afsnit 6.1.1. i sekvens 1, 2 og 3 samt sekvens 6.2.1 i sekvens 2. Disse forskellige afsnit og sekvenser synes også at vise, at eleverne blev understøttet i at udvikle en historisk bevidsthed, når det kom til at forstå sig selv som en skoleelev, der har digitale teknologier til rådighed i forhold til at arbejde med matematiske problemstillinger og ræsonnementer, der er grebet an på en særlig måde i forhold til de redskaber, notationer, matematiksyn, der kommer til syne i originalkilden.

### 6.3.2. Samspillet mellem de forskellige medieringsformer og strukturopfattelse

I dette afsnit præsenteres tre forskellige pointer om samspillet mellem de forskellige medieringsformer og mellem strukturopfattelse og medieringsformerne: Pragmatisk og epistemisk.

*Retfærdiggørende mediering versus pragmatisk og epistemisk mediering*

Som tidligere nævnt synes pragmatiske og epistemiske medieringer ved første øjekast at være at foretrække i en undervisning, der søger at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Når det så er sagt, synes det også som om, en af nøglerne til at få blik for det findes i, når eleverne selv bliver klar over, at der måske finder en form for retfærdiggørende mediering sted. Det sker på forskellig vis fx i sekvenserne i case 2 episode 2. Her bliver lærerens spørgsmål afgørende for, at eleverne kan komme videre og for, at de understøttes i overgangene mellem de forskellige former for medieringer. I case 1 episode 2 bliver sceneskiftet mellem at arbejde med problemstillingen i GeoGebra og skolegården yderligere en afgørende faktor for, at det, der ved første øjekast kunne tolkes som en retfærdiggørende mediering under arbejdet med GeoGebra, snarere fremstod som en epistemisk mediering, da eleverne arbejdede med problemstillingen i skolegården og inddrog decimaltal og kvadratrod. Her kunne der i den fælles opsamling yderligere have været lagt vægt på at understøtte brugen af GeoGebra i forhold til at løse problemstillingen fra Platons Menon, så det udgjorde en epistemisk mediering set ud fra et nutidigt perspektiv, hvor det fx er muligt at inddrage decimaltal på en hurtig måde ved at bruge målefunktionerne i redskaberne. I forløbsdesignet kunne der have være lagt vægt på, at de forskellige løsninger eleverne havde arbejdet med i GeoGebra, før de arbejdede med løsninger i skolegården, havde været en del af den fælles opsamling. Således at de forskellige muligheder i hhv. arbejdet med GeoGebra og i skolegården i højere grad havde stået skarpere over for hinanden. Det kunne yderligere have bidraget til at understøtte, at eleverne fik en bedre forståelse af de forskellige muligheder deres arbejde med GeoGebra kunne indeholde.

*Vekselvirkning mellem pragmatisk og epistemisk mediering*

En pragmatisk mediering er knyttet til argumenterne i forbindelse med det mere konkrete eksempel, mens den epistemiske mediering er knyttet til de mere generelle, abstrakte eller teoretiske argumentationer og ræsonnementer. Vekslen herimellem synes afgørende i forhold til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Det anes fx i opsamlingerne i afsnit 6.1.3. og 6.2.3. sekvens 1, hvor der præsenteres forskellige argumenter og løsningsforslag i den fælles opsamling og disse veksler mellem at være konkrete og mere generelle.

*Forholdet mellem strukturopfattelse og medieringsformerne pragmatisk og epistemisk*

Yderligere kan det fremhæves, at det synes som om, der er en forbindelse mellem at arbejde ud fra en strukturopfattelse, og at GeoGebra kan udgøre både en pragmatisk og epistemisk mediering. Det kan kvalificere brugen af fx dragging, de forskellige måleredskaber samt gitterfunktionen i GeoGebra. Således at der fokuseres på strukturerne, sammenhængene mellem de matematiske definitioner og figurer i originalkilderne og på sammenhængene mellem muligheder i nutiden i forhold til at arbejde med og fortolke tekster fra fortiden, hvor disse funktioner ikke på samme måde var tilgængelige og mulige at sætte i spil i dynamiske visualiseringer, i hurtige forskelligartede feedbackmuligheder. Det kommer fx til udtryk i afsnit 6.1.1. i sekvens 3, i afsnit 6.2.2. i sekvens 2 samt i afsnit 6.2.3. i sekvens 2. Case 2, episode 2 i sekvens 2 og 3 er eksempler på, at vekslen mellem pragmatisk og epistemisk mediering synes at være vigtig i forhold til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle både den undersøgende og produktive side af deres ræsonnementskompetence. Afslutningsvist kan det også fremhæves, at når lærernes spørgsmål understøtter eleverne i at arbejde med overgangene mellem en pragmatisk og en epistemisk mediering, synes det også at understøtte elevernes muligheder for yderligere at arbejde med en strukturopfattelse og vice versa.

### 6.3.3. Ræsonnementskompetencen i samspil

Afsnittet består af to underafsnit. Det første fokuserer på samspillet mellem ræsonnements-kompetencen, dynamisk læsning og medieringsformerne. Det andet fokuserer på samspillet mellem den undersøgende og den produktive side af ræsonnementskompetencen.

*Ræsonnementskompetencen, dynamisk læsning og medieringsformerne*

I begge afprøvninger italesætter lærerne, at det er elevernes ræsonnementer, der er i centrum i forløbene. Det handler om at prøve at lytte, argumentere, prøve at overbevise og lade sig selv overbevise. I den forbindelse lægger lærerne også vægt på, at det ikke er deres autoritet som "svargiver", der er i centrum. Det kommer fx til udtryk i afsnit 6.1.1. sekvens 5 og afsnit 6.2.1. sekvens 1. Dette understøtter både elevernes muligheder for at arbejde med en dynamisk læsning, opmærksomhed mod ikke bare at tage en retfærdiggørende mediering for gode varer, samt at eleverne selv giver sig i kast med både at bruge den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen, når de arbejder med GeoGebra. Dermed giver det grobund for, at GeoGebra kan udgøre en pragmatisk og epistemisk mediering.

*Samspillet mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen*

GeoGebra giver muligheder for, at eleverne kan arbejde med de forskellige "bidder" af originalkilderne på en anden måde end ved bare at følge og forstå kilden. Samtidig gør det også ofte, at eleverne selv skal producere argumenter og kæder heraf. Sidstnævnte viste sig at være sværere end som så, men eleverne synes at bruge deres produktive side af ræsonnements-kompetencen i bl.a. afsnit 6.1.1. i sekvens 3 og afsnit 6.1.2. i sekvens 1. Disse adskiller sig fra hinanden ved, at eleverne i afsnit 6.1.1. i sekvens 3 arbejder med deres produktive side med henblik på at understøtte deres muligheder for at udvikle den undersøgende side af deres ræsonnementskompetence. Mens det i afsnit 6.1.2. i højere grad kan siges, at eleverne tager udgangspunkt i den undersøgende side af deres ræsonnementskompetence med henblik på at støtte udviklingen af den produktive side af deres ræsonnementskompetence.

I afsnit 6.2.3. arbejder eleverne med en del af originalkilden, som ikke understøttes af argumenter i selve kilden. Derfor bruger eleverne også hovedsageligt deres produktive side af ræsonnementskompetencen til at løse det. De bruger deres tidligere arbejde med at følge argumenterne i originalkilden til at understøtte deres brug af den produktive side af ræsonnementskompetencen. Det synes som om, eleverne har det meget forskelligt med at arbejde på denne måde. Det synes svært for alle, selv for læreren, og der findes ikke nogle helt vante måder at gå til opgaverne på. Det synes at være et væsentligt potentiale, men også en udfordring ved at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

### 6.3.4. De indirekte fund

I dette afsnit præsenteres nogle af de fund, der viser nogle udfordringer, der synes at være gennemgående i de retrospektive analyser. Disse udfordringer kunne muligvis være undgået, hvis der havde været mere fokus på at udvide og gruppere mulige strukturer med afsæt i de forskellige dele af det matematiske indhold i originalkilden.

*De bærende ideer*

Som beskrevet i kapitel 3 “Teori” er en del af beskrivelsen af at besidde ræsonnements-kompetencen i KOM-rapporten at kunne afdække de bærende ideer i beviser. Lærerne prøver at understøtte, at eleverne får blik for nogle af de bærende ideer i beviserne eller problemstillingerne i de fælles opsamlinger i klasserne. Det ses fx i afsnit 6.1.1. sekvens 4 og i lærerens guidning af opsamlingen i afsnit 6.2.3. sekvens 1. Der lå klart et yderligere potentiale i begge afprøvninger, som måske kunne have været udnyttet bedre, hvis der i planlægnings-fasen var blevet fokuseret mere på, hvordan de bærende ideer kunne bringes frem og i spil i undervisningen.

*En kæde af argumenter*

Det var tydeligvis svært for eleverne at gennemføre kæder af sammenhængende argumenter, som bl.a. er det, der kendetegner et ræsonnement. Der er eksempler på, at eleverne starter på kæder af argumenter, men de får dem ikke ført helt igennem. Ligesom det heller ikke som sådan vægtes i de fælles opsamlinger i klassen. Her bliver der særligt lagt vægt på forskellige argumenter, hvilket også i sig selv har værdi. Umiddelbart er det interessant, fordi begge kilder er bygget op som en kæde af argumenter, der skal overbevise. Måske er det alligevel svært for eleverne at få greb om det med kæder af argumenter, fordi der er så meget nyt på spil for dem undervejs i forløbene. I forløbene var der fokus på forskellene mellem at arbejde med originalkilden og i GeoGebra samt på, at elevernes egne argumenter skulle være bærende og være dem, der blev taget udgangspunkt i. Samtidig skal det også ses i lyset af, at det virkede som om, det var nyt for eleverne at arbejde eksplicit med matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser. Her kunne man forestille sig, at hvis der var gennemført flere iterationer i samme klasse, kunne det at have fokus på kæder af sammenhængende argumenter være et særligt fokus med henblik på at understøtte elevernes udvikling af ræsonnements-kompetencen. Her kan det igen fremhæves, at forløbet måske kunne have udspillet sig anderledes, hvis der i planlægningen af forløbene havde været arbejdet mere systematisk ud fra en strukturopfattelse. Forstået på den måde, at man kan gennemtænke mulige "strukturnet" fra begyndelsen, således at læreren er forberedt på at inddrage forskelligt matematisk indhold og mulige overgange herimellem i sine spørgsmål til eleverne i dialoger med dem hver især, i grupper og i de fælles opsamlinger.

*Den historiske bevidsthed – matematik- og menneskesyn*

Der kunne have været arbejdet mere indgående med både matematik- og menneskesyn i de to kilder. Det er ikke et selvstændigt fokusområde i nærværende ph.d.-projekt. Der ligger klart et større potentiale i forhold hertil i arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Her kunne også med fordel tænkes i tværfaglige forløb mellem fx matematik, naturfag, historie, kristendomskundskab, billedkunst, musik og dansk. Det kunne afhænge af, hvilke original-kilder, der blev udvalgt.

# 7. Diskussion

Formålet med diskussionerne i dette kapitel er at lede frem imod en besvarelse af ph.d.-projektets overordnede problemstilling, som lyder:

> Hvilke didaktiske principper kan understøtte, at elever får mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?

Besvarelsen af den overordnede problemstilling baseres på en diskussion med afsæt i de tre forskningsspørgsmål, de teoretiske distinktioner samt DBR som metodologisk ramme.

I afsnit 7.1., 7.2. og 7.3. genbesøges hvert af de tre forskningsspørgsmål, og hovedfundende diskuteres i relation hertil. I afsnit 7.4. beskrives projektets bidrag i form af didaktiske principper. Det består af tre underafsnit:

- 7.4.1. Hvori de teoretiske distinktioner og de indbyrdes samspil herimellem diskuteres og udmøntes i ph.d.-afhandlingens teoretiske bidrag – en model af, hvordan termerne i de fire teoretiske distinktioner og termen historisk bevidsthed kan spille hensigtsmæssigt sammen, når der er fokus på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.
- 7.4.2. Med afsæt i modellen i 7.4.1. formuleres mere konkrete målsætninger i relation hver af de forskellige termer, der indgår i modellen.
- 7.4.3. Her præsenteres spørgsmål, ideer og opmærksomheder, som forskere, lærere, læreteams, opgave- og forløbsdesignere kan benytte, hvis de ønsker at udarbejde forløb, der fokuserer på samspillet med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

I afsnit 7.5. genbesøges DBR som metodologisk ramme. Her lægges der særlig vægt på den argumenterende grammatik (Cobb et al, 2017), ontologisk innovation (diSessa & Cobb, 2004) og de hypotetiske læringsspor (Bakker & van Eerde, 2015).

## 7.1. Forskningsspørgsmål 1 i forhold til reviewet

Forskningsspørgsmål 1 (FS1) knytter sig særligt til arbejdet med litteraturlæsning i forbindelse med ph.d.-projektet. Det udmønter sig særskilt i kapitel 2 “Review – Iscenesættelse og baggrundslitteratur”, men trækker også spor i besvarelsen af de øvrige forskningsspørgsmål.

FS1 lyder:

> Hvordan kan hidtidig forskning bidrage med designmæssige og teoretiske overvejelser i forbindelse med planlægning, gennemførelse og analyse af undervisningsforløb i mellemtrinsklasser med fokus på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?

Formålet med reviewet var 1) at placere ph.d.-projektet i forhold til tidligere forskning, 2) at bidrage med opmærksomheder i forhold til at designe afprøvningerne og 3) danne grundlag for at vælge teorier, der skulle arbejdes videre med. Sidstnævnte førte til de fire teoretiske distinktioner:

- Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002)
- Dynamisk og statisk læsning (Mellin-Olsen, 1984)
- Epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018)
- Regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984)

Derudover blev Jensens (2011) definition af historisk bevidsthed også en del af det teoretiske grundlag for afhandlingen. De skulle tilsammen understøtte både det designmæssige og analytiske arbejde i forbindelse med afprøvningerne. Designet i afprøvningerne er udsprunget af forskellige opmærksomheder i reviewet sammenholdt med de teoretiske distinktioner, der er valgt som gennemgående i afhandlingen.

I det følgende fremhæves de mest fremtrædende opmærksomheder, planlægningen af afprøvningerne tog afsæt i. Det diskuteres, hvordan de udmøntede sig i praksis og hvilke genovervejelser, afprøvningerne gav anledning til evt. inspireret af nogle af de opmærksomhedspunkter fra reviewet, der ikke blev taget med i afprøvningerne.

Ifølge reviewet kan arbejdet med matematikkens historie åbne for, at eleverne får blik for, at der findes andre måder at arbejde med matematik end det, de er vant til fra deres daglige matematikundervisning. Eleverne kan få blik for, at matematik udvikler sig i tid og rum. Det kan arbejdet med originalkilder være med til at belyse og ydermere kan det understøtte, at eleverne får indblik i, hvordan der fx kan arbejdes med forskellige bevistyper, notationer, symboler og redskaber. I reviewet fremgår det også, at lærerens guidning er afgørende for elevernes muligheder for at opnå en matematisk forståelse, som de kan spørge og argumentere ud fra. Det giver anledning til tre særlige diskussionsområder, der tages op i dette afsnit: 1) Læsestrategier og valget af dynamisk læsning som sigtepunkt, 2) Elevernes selvstændige og kreative arbejde med samspillet og guidning i opgaverne i den forbindelse og 3) Lærerens rolle og grundlag for at agere i forhold til arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. På baggrund heraf præsenteres de opmærksomheder, der tages med videre i forhold til projektets praksismæssige bidrag.

*Læsestrategier og valget af dynamisk læsning som sigtepunkt*

I reviewet præsenteredes forskellige læsestrategier i forbindelse med at arbejde med originalkilder (fx Barnett et al., 2014; Chorlay, 2016; 2019; Fried et al., 2016). Fælles for disse læsestrategier er, at de udspringer af en hermeneutisk tilgang til at læse tekster. Chorlay (2019) pointerer bl.a., at det er vigtigt at undgå for mange detaljerede spørgsmål, når der arbejdes med læsestrategier på mellemtrinnet. Det var en pointe, der blev taget med i afprøvningerne. I guided reading (Barnett et al., 2014) tages der afsæt i forskellige tekststykker fra originalkilder med tilhørende spørgsmål, som lægger op til, at de studerende kan reflektere og respondere i forhold til det matematiske indhold i de forskellige tekststykker. Tilgangen til at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra i afprøvningerne er i nogen grad inspireret af teksterne fra reviewet. Det gælder fx i forhold til at arbejde med svære ord, bryde teksten op i mindre bidder, reformulere teksten med udgangspunkt i elevernes arbejde med GeoGebra, udarbejde opgaver, der understøtter arbejdet hermed osv. De læsestrategier, der præsenteredes i reviewet tager afsæt i elevers arbejde med originalkilder – ikke deres arbejde med samspillet med GeoGebra. Det tyder på, at der er brug for en læsetilgang, der kan understøtte elever i at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Fried (2007) giver med reference til Saussures (1974) tegnsystemer en beskrivelse af, hvordan skelnenen og vekslenen mellem at fokusere på hhv. fungerende sprogsystemer (synkron beskrivelse) og sprogets historiske udvikling (diakron beskrivelse) kan medvirke til at skabe en matematisk selvforståelse. Det kan sættes i relation til vekselvirkningen mellem at arbejde med matematikkens historie og den nutidige matematik. Frieds brug af Saussures (1974) tegnsystemer knytter sig ikke særligt til at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra, men kan bruges i den forbindelse. Både originalkilden og GeoGebra kan ses som forskellige sprogsystemer, som må sættes i spil i forhold til elevernes fungerende sprogsystemer og på den baggrund danne grundlag for, at eleverne kan udvikle en historisk bevidsthed. I afprøvningerne kom den dynamiske læsning til udtryk ved, at eleverne hele tiden arbejdede med GeoGebra med udgangspunkt i sproglige passager og matematiske problemstillinger i teksten. Eleverne arbejdede enten i makkerpar eller grupper og gik på den måde hele tiden i dialog med hinanden om: 1) Hvordan de kunne bruge funktionerne i GeoGebra og den hurtige visuelle feedback til at gå i dialog med teksten og løse problemstillinger herfra og 2) omvendt, hvordan de kunne bruge teksten til at gå i dialog med GeoGebra. På den måde medvirkede den dynamiske læsning til at skabe et rum for elevernes egne fortolkninger, egne argumenter og ræsonnementer. Det synes som om, der i den dynamiske læsning lå et særligt potentiale i forhold til at skabe rum for, at elevernes produktive side af ræsonnementskompetencen kunne sættes i spil. Således at elevernes egne ideer og brug af GeoGebra i den forbindelse var i centrum for deres opbygning af argumenter. Her kan det diskuteres om disse måder at arbejde med dynamisk læsning, måske til tider spændte ben for, at den strukturopfattelse, der lå til grund for originalkilden gik tabt og teksten måske kom til at fremstå lidt mere fragmenteret, som en tekst bestående af enkeltstående argumenter.

*Elevernes selvstændige og kreative arbejde med samspillet og guidning i opgaverne i den forbindelse*

Generelt fokuserer teksterne i reviewet ikke på at arbejde bevidst med at adskille og koble den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen bl.a. af den grund, at det ikke er KOM-rapportens (Niss & Jensen, 2002) definition af ræsonnementskompetencen, der er omdrejningspunkt for disse tekster[29]. En umiddelbar vurdering er dog, at hovedvægten i mange af teksterne ligger på, at eleverne, de studerende, bruger den produktive side af deres ræsonnementskompetence med henblik på at understøtte den undersøgende side. Således at målene i forhold til at arbejde med matematikhistorie, herunder originalkilder, hovedsageligt er at understøtte, at eleverne kan følge, forstå og udføre et ræsonnement eller et bevis, der læner sig op ad det, de har arbejdet med i originalkilden. Eller også bruges originalkilden til at åbne for forståelser, for overgange, mellem forskellige delelementer undervejs i bevisførelser og forståelser for forskellige former for beviser. Dette synes også at gælde for de tekster, der omhandler samspillet mellem matematikhistorie, herunder originalkilder, og digitale teknologier – også dem, der retter sig mod mellemtrinnet, blot ikke på en så formel måde. Det kommer fx til udtryk hos Papadoupolus (2014), som lægger op til, at elevernes nysgerrighed er udgangspunktet, men målet synes at være, at eleverne skal kunne følge Arkimedes' tredje metode til at finde $\pi$. Han skriver bl.a.:

> But, even more important was the fact that they were convinced about the validity of the formula because of their own investigation rather than of the teacher's authority. (Papadoupolus, 2014, s. 76)

[29] Undtagelser herfor er bl.a. Thomsen (2020) samt Thomsen og Jankvist (in press).

Papadoupolus lægger vægt på, at eleverne bliver overbevist, fordi de selv har undersøgt det og ikke blot på grund af lærerens autoritet. Men der synes ikke også i forløbet at være mulighed for, at eleverne fx selv undersøger, om de kan finde andre måder, der dur til at finde $\pi$ ved hjælp af redskabet Cabri Geometry, som de brugte i det forløb Papadoupolus' studie tager udgangspunkt i.

I afprøvningerne blev der lagt vægt på, at opgaverne skulle lægge op til, at eleverne skulle formulere deres egne udsagn, tolkninger og ideer, altså bruge deres produktive side af ræsonnementskompetencen. Elevernes egne argumenter og formuleringer skulle være de bærende og være i centrum. Der skulle eksplicit skabes rum herfor i forbindelse med elevernes brug af GeoGebra i forbindelse med deres læsning af originalkilden. Det betød bl.a., at der kom mange forskellige argumenter i spil, der tog udgangspunkt i elevernes arbejde med GeoGebra, og de muligheder "knapperne" gav. Men det betød måske også, at det var svært for eleverne både at forstå og følge et ræsonnement i form af kæder af argumenter, endsige selv formulere et. Her kan det diskuteres, om en mere guidende tilgang i selve opgaveformuleringerne ala den som hhv. Chorlay (2015) samt Jankvist og Geraniou (2019) præsenterer (jf. afsnit 2.5) i højere grad kunne have understøttet elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

*Lærerens rolle og grundlag for at agere i forhold til arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.*

Caglayan (2016) samt Capone et al. (2019) fremhæver bl.a. særlige muligheder for at arbejde med udgangspunkt i at lade eleverne være skabende, når der arbejdes med brug af digitale teknologier i forbindelse med historiske problemstillinger. Ligesom nævnt ovenfor synes der også her at være lagt vægt på skabende i forhold til at forstå bestemte metoder. I disse to studier er der lagt vægt på lærerens rolle som guide. I afprøvning 1 havde læreren en guidende funktion, både i forhold til at læse tekstbidder højt for eleverne, mundtligt formulere opgaver og spørgsmål i forbindelse hermed og samle op på dem i fælles diskussioner i klassen. Lærerens spørgsmål og kommentarer i dialogerne med eleverne havde i høj grad en guidende funkton i forhold til at få elevernes egne, kreative argumenter i spil i forhold til det matematiske indhold, der var omdrejningspunktet for samspillet. Eleverne var også ude i skolegården og arbejde med de samme redskaber, som der var brugt i originalkilden. Der var spændende argumenter og dialoger i spil undervejs i afprøvningen, men der synes alligevel også at være nysgerrigheds-punkter og argumenter, eleverne ikke selv bragte i spil i de fælles opsamlinger. Afsnit 6.1.2. og 6.1.3. er et eksempel på dette. I afprøvning 2 bestod lærerens guidning hovedsageligt i at introducere eleverne til opgaverne, gå i dialog med dem i deres besvarelser heraf og samle op på de forskellige besvarelser i fælles diskussioner i klassen. Her var altså lagt op til, at eleverne skulle arbejde mere selvstændigt med opgaverne end i afprøvning 1. Det viste sig flere gange, at lærerens dialog med eleverne var afgørende for, at eleverne kunne arbejde videre med deres konstruktioner, argumenter m.m. Læreren havde ofte svært ved at nå rundt til alle makkerpar og grupper. Undervejs i afprøvningen var der ansatser til, at eleverne både i deres gruppearbejde og i de fælles opsamlinger fik formuleret kæder af argumenter, men det var svært at få dem tydeligt frem. Her kan det i høj grad diskuteres, om det var en god ide, at opsamlingerne ofte faldt i forlængelse af elevernes arbejde med ét eller nogle sammenhængende tekststykker fra originalkilden. Måske kunne en retrospektiv analyse af elevprodukter og filmklip før de fælles opsamlinger have biddraget til en yderligere kvalificering heraf.

*Opsamling*

I begge afprøvninger var elevernes argumenter i centrum, og der var ansatser til, at eleverne formulerede kæder heraf. Det synes dog også som om, der var et yderligere potentiale, der kunne videreudvikles, hvis endnu en iteration var mulig. På baggrund af reviewet og den retropsketive analyse af afprøvning 1 og 2 kan det diskuteres, hvor den gode balance ligger i forhold til:

1. Den rolle originalkilden skal spille i forhold til at sætte rammerne for elevernes muligheder for at formulere argumenter og ræsonnementer i arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Således at argumentationsrækken og de bærende ideer i originalkilden ikke går tabt, og teksten måske kommer til at fremstå lidt mere fragmenteret, som en tekst bestående af enkeltstående argumenter. Samtidig er det vigtigt, at originalkilden ikke dikterer elevernes arbejde i en sådan grad, at de ikke får mulighed for at bruge den produktive side af ræsonnementskometencen.
2. At opgaveteksterne kan være guidende for elevernes arbejde med at formulere argumenter og ræsonnementer samtidig med, de danner rum for elevernes kreativitet og produktivitet i deres arbejde med samspillet mellem originalkilde og GeoGebra.

Svaret synes at være, at det er situationsafhængigt i forhold til valget af originalkilde, elevernes faglige niveau og arbejdsmæssige formåen. I den forbindelse findes der ikke én rigtig balance i et undervisningsforløb, så derfor kan det være relevant at søge at finde svar på, hvordan balancen kan gøres justerbar i forhold til de enkelte elever. Her kan den løbende planlægning og justering af et forløb tage udgangspunkt i samspillet mellem de strukturopfattelser, der kommer til syne i elevbesvarelserne, i originalkilden og som GeoGebra lægger op til i den forbindelse. Det synes at kunne skabe et stærkt fundament for, at læreren kan guide på en måde, der understøtter eleverne i at formulere argumenter og ræsonnementer, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

## 7.2. Forskningsspørgsmål 2 i relation til lærebogsanalysen

Analysen af lærebogssystemet Kontext+ til mellemtrinnet i kapitel 5 tager udgangspunkt i FS2, som lyder:

> Hvilke særlige didaktiske overvejelser rettet mod at understøtte elever i at arbejde med koblingen mellem matematiske ræsonnementer og GeoGebra giver en analyse af udvalgte kapitler fra et lærebogssystem anledning til at være opmærksom på?

Formålet med analysen er, at den skal vise: 1) Hvordan lærebogssystemet synes at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med GeoGebra og 2) hvilke særlige didaktiske overvejelser en analyse af lærebogssystemet Kontext+ særligt giver anledning til i forhold til at arbejde med matematiske ræsonnementer og GeoGebra.

Gissel et al. (2019) har udarbejdet en analyse af 8 udvalgte analoge lærebogssystemer til mellemtrinnet, hvoriblandt Kontext+ er et af dem. Her afdækkes kompetencedækningen i forhold til Fælles Måls færdigheds- og vidensområde "Måling" inden for stofområdet "Geometri og måling". Gissel et al. (2019) skriver bl.a.: "Men vi har måttet konstatere at det er vanskeligt at identificere kompetencepotentiale" (s. 25). Det kan jeg umiddelbart tilslutte mig, når det gælder mit arbejde med at analysere lærebogssystemet kontext+. Derfor finder jeg det også relevant at sammenholde udvalgte fremhævede pointer fra analysen i kapitel 5 i nærværende afhandling med andres analyser. Gissels et al. (2019) analyse er ikke inddraget i selve analysen i kapitel 5, fordi de har en anden vinkel på deres lærebogsanalyser. De har fx ikke særskilt fokus på at undersøge, hvordan lærebogssystemet understøtter elevers arbejde med koblingen mellem matematiske ræsonnementer og GeoGebra, men på trods heraf er flere af deres resultater relevante at bringe i spil i nærværende ph.d.-afhandling. Derfor indgår Gissel et al (2019) i stedet som en del af diskussionen i dette afsnit, om end de forskellige vinkler kan ses som en usikkerhedsfaktor, når de to analyser sammenholdes på forskellig vis. Dertil kommer, at Gissel et.al. (2019) vurderer de forskellige læremidlers kompetencedækning i forhold til hinanden. Det vil sige, at deres vurderinger omkring middel, høj og lav, skal ses i relation til de øvrige læremidlers kompetencedækning. Det er en yderligere udsikkerheds-faktor, der må medtænkes.

I det følgende diskuteres de mest fremtrædende opmærksomheder:

1. Kompetenceunderstøttelse, mængden af opgaver samt tydelighed
2. "Hverdagsfortællinger", regler og strukturer

På baggrund af diskussionen heraf, fremhæves fem af de didaktiske overvejelser, der synes at være mest fremtrædende.

*Kompetenceunderstøttelse, mængden af opgaver samt tydelighed*

Ifølge Gissel et al (2019) ekspliciteres sammenhængen mellem kompetencer og aktivitetsniveau næsten ikke i lærevejledningen til Kontext + 4-6:

> Kontext+ 4-6 scorer lavt på eksplicit kompetencedækning på alle delkompetencer. Dette skyldes at det i lærervejledningen næsten ikke ekspliciteres hvor kompetencerne er i spil på aktivitetsniveau. (Gissel et al., 2019, s. 21)

I forhold til kapitel 5 i denne afhandling, kan det yderligere suppleres med, at det samme synes at gøre sig gældende i forhold til dokumentet, der ligger under "Læringsmål til årsplanen" på onlineportalen og så de indledende målbeskrivelser i hvert kapitel i elevbogen. Her synes heller ikke at være en eksplicit sammenhæng herimellem. Af kapitel 5 fremgår det yderligere, at de kapitler i Kontext+, der har fokus på koblingen mellem kompetencen "Ræsonnement og tankegang"[30] og stofområdet "Geometri og måling", består af et meget stort antal af opgaver koncentreret på forholdsvis få sider, hvilket også synes at falde i tråd med Gissel et al. (2019), som bl.a. fremhæver, at: "Læremidlet udmærker sig ved at have den mest omfattende behandling af måling når man ser på antal forekomster" (Gidsel et al. 2019, s. 22). Umiddelbart kan diskuteres, hvorvidt det er en udmærkelse eller ej med så omfattende mængder af opgaver, når der fokuseres på et arbejde med at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres matematiske kompetencer, både ræsonnementskompetencen, men også mere generelt. Den store mængde af opgaver kan risikere, at både lærere og elever bliver mere forhippede på at nå igennem lærebogssystemet end egentligt at fokusere på, at eleverne opnår de forskellige kompetencer, der fremhæves at være i fokus. Eleverne bliver i flere opgaver bedt om at undersøge noget, men sjældent om at formulere hypoteser, argumenter eller ræsonnementer i forbindelse med deres undersøgelser. Det synes ikke at være en tungtvejende faktor i formuleringen af opgaver. Det synes også i nogen grad at stemme overens med Gissel et al (2019), som bl.a.

[30] Kapitlerne i Kontext+ har fokus på den matematiske kompetence "ræsonnement og tankegang". Årsagen til, de fremstår som én kompetence, er som tidligere beskrevet, at kapitlerne tager afsæt i Fælles Mål.

vurderer, at ingen af de analyserede lærebogssystemer dækker delkompetence 3 inden for "ræsonnement og tankegang". Delkompetence 3 vurderer de i deres analyse ud fra spørgsmålet: "Lægger læremidlet op til at eleverne skal opstille og efterprøve hypoteser?" (Gissel et al., 2019, s. 13). I forlængelse heraf kunne en didaktisk overvejelse igen være om færre, men mere dybdegående opgaver, ville være at foretrække. Når Gissel et al. (2019) særskilt ser på Kontext+, vurderer de bl.a:

> Kontext+ har middel implicit dækning i forhold til ræsonnement og tankegang 2 idet lærermidlet implicit lægger op til at eleverne selv skal ræsonnere i flere aktiviteter. (Gissel et al., 2019, s. 21)

"Ræsonnement og tankegang 2" vurderer de ud fra spørgsmålet: "Lægger læremidlet op til at eleverne selv skal ræsonnere" (Gissel et al., 2019, s. 13). Gissel et al. (2019) henviser til både Fælles Mål og KOM-rapporten i deres indledende kompetencebeskrivelse. Derfor formodes de her at henvise til den produktive side af ræsonnementskompetencen. Eleverne bliver sjældent bedt om eksplicit at formulere hypoteser, argumenter eller ræsonnementer i opgaverne i de udvalgte 3 kapitler i Kontext+, der er medtaget i analysen i denne afhandling. I de opgaver, der er knyttet til GeoGebra lægges der ydermere ofte op til, at eleverne skal give visuelle løsningsforslag konstrueret i GeoGebra, give eksakte svar eller kan svare med enstavelsesord. Det kan tolkes som, at det ligger implicit i opgaverne, at eleverne kan arbejde sammen om at løse dem og dermed blive sat i situationer, hvor de skal diskutere forskellige svarmuligheder. Ligesom forskellige svarmuligheder kan tages op i fælles diskussioner i klassen og blive genstand for en nøjere granskning af de bagvedliggende argumenter herfor. Det kan også tolkes som, at det handler om at svare hurtigt på opgaverne og gå videre til den næste. Derfor synes det en diskussion værdig, om lærebogssystemet ikke i højere grad kunne have lagt op til, at eleverne skulle formulere hypoteser, argumenter, ræsonnementer og forklaringer, hvis der også skulle lægges vægt på den produktive side af ræsonnementskompetencen. Her skal det påpeges, at Gissel et al. (2019) vurdering af, at Kontext+ har en middel dækning, skal ses i forhold til de øvrige læremidler, de har analyseret. Hvis det sammenholdes med analysen i kapitel 5 i nærværende afhandling, synes det umiddelbart yderst relevant at supplere arbejdet med et lærebogssystem med forløb, der eksplicit fokuserer på at understøtte elevers både produktive og undersøgende side af ræsonnementskompetencen. Det gælder ikke kun i forhold til de klasser, der arbejder med Kontext+, det synes altså også at gælde for klasser, der arbejder med andre lærebogssystemer. Ligesom det ikke kun synes at gælde, når der er fokus på kombinationen mellem ræsonnementskompetencen og GeoGebra. Afslutningsvist kan det også diskuteres i hvor høj grad lærebogssystemet lægger op til, at der bevidst kan arbejdes med hhv. tankegangskompetencen, ræsonnementskompetencen og samspillet herimellem. Her synes forløb, der fokuserer på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra at have et særligt potentiale (jf. Thomsen & Jankvist, in press). Det kunne være endnu et argument for at supplere klassers arbejde med lærebogssystemer med sådanne forløb.

*Regler, strukturer og "hverdagsfortællinger"*

I analysen af lærebogssystemet i denne afhandling fremgår det, at kapitlerne i lærebogssystemet indholdsmæssigt er bygget op på en måde, der synes at have potentiale til at arbejde ud fra en strukturopfattelse. De forskellige faglige områder, der lægges op til at arbejde med i opgaverne, synes i sig selv at kunne give blik for forskellige sammenhænge mellem de matematiske områder, der er i fokus i de pågældende kapitler. Som indikeret tidligere kan det alligevel diskuteres, om det synes indfriet i opgaveformuleringerne. De mange opgaver med fokus på at finde eksakte og kortfattede svar kan også nævnes som mulige benspænd herfor. Generelt synes det i højere grad at lægge op til, at matematiske regler bruges end at skabe rum for, at eleverne arbejder med at opbygge forståelser af, hvorfor reglerne lyder som de gør – og hvordan de relaterer sig til andre matematiske regler.

Endnu en didaktisk overvejelse, der kan nævnes her i diskussionen er, at det også synes at være en diskussion værdig, hvorvidt de fortællinger, fx omkring voksenerhverv, matematikopgaverne i kapitlerne udspringer fra, understøtter elevernes muligheder for at udvikle ræsonnementskompetencen i deres arbejde med GeoGebra eller om de snarere besværliggør dette. Umiddelbart kan de synes at udgøre et oversættelsesarbejde i forhold til at forstå, hvad opgaverne går ud på, og hvordan de fx kan understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

*Opsamling – særlige opmærksomheder*

De særlige opmærksomheder, der kan fremhæves på baggrund af analysen af lærebogssystemet Kontext+ 4, 5 og 6 samt ovenstående diskussion, er:

1. Det skal være tydeligt for eleverne, at der er fokus på at argumentere og ræsonnere overordet for hele forløbet. Det gælder også både for introduktioner og opsamlinger til opgaver, men også i selve opgaveformuleringerne.
2. Der skal være et begrænset antal opgaver, der skal være tid til at løse dem, og der skal løbende samles op på elevernes arbejde med opgaver.

3. Eleverne skal også skriftligt svare på opgaver, de arbejder med i GeoGebra. Der skal være plads til, at de kan komme med forklaringer og argumenter.
4. Der skal være fokus på, at de bagvedliggende strukturer og sammenhænge mellem forskellige matematiske objekter bliver synlige og giver anledning til, at eleverne reflekterer over, hvorfor forskellige matematiske regler lyder, som de gør.
5. Eleverne skal have mulighed for at reflektere over dem selv som matematiske aktører, når de arbejder med ræsonnementer i forbindelse med deres brug af GeoGebra. Her kan det måske i sig selv tænkes at udgøre en hverdagsfortælling?

## 7.3. Forskningsspørgsmål 3 knyttet til afprøvningerne

Omdrejningspunktet for arbejdet med både planlægning og analyse af de tre afprøvninger i ph.d.-afhandlingen er FS3, som lyder:

> Hvordan kan lærere og elever på mellemtrinnet arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på en måde, der understøtter, at elever kan udvikle deres matematiske ræsonnementskompetence?

Som nævnt i indledningen indgår både lærere og elever som aktører i FS3, fordi der i den retrospektive analyse både ses på, hvordan læreren introducerer og samler op på opgaver, samt hvordan eleverne arbejder med opgaverne og byder ind i fælles dialoger i klassen samt lærerens og elevers dialoger undervejs i arbejdet med forskellige opgaver. I dette afsnit samles der op på nogle af de mest fremtrædende praksisorienterede fund i den retrospektive analyse med hensyn lærere og elevers ageren i forbindelse med forskellige arbejdsformer.

*Lærerne*

I den retrospektive analyse syntes det væsentligt, at lærerne på forskellig vis italesatte, at der var fokus på ræsonnementskompetencen. Det synes fx at stemme godt overens med Chorlay (2019), som bl.a. fremhæver, at det er vigtigt, at formålet med at læse teksten er tydeligt for eleverne. Samtidig fortalte lærerne, at det også handler om at overbevise sig selv og andre og dermed er det væsentligt at lytte til andres argumentationer, hvilket falder godt i tråd med både Harel og Sowder (2007) samt Mason et al. (1982). Lærerne satte deres egen autoritet i spil i den forbindelse. De var nysgerrige sammen med eleverne og fortalte, at de også syntes, det var svært ind imellem. Lærerne var klar til at udfordre, men også at lade sig overbevise af elevernes argumenter. Det kom til at stå som en kontrast i forhold til begge de udvalgte originalkilder. Der i høj grad udspringer af og giver udtryk for et platonisk matematiksyn, hvor matematikken præsenteres som universel gyldig. Ligesom både Euklid og Sokrates fremstår som autoriteter, der åbner andres muligheder for at få indblik i matematikken. I afprøvningerne blev eleverne sat i et specifikt matematisk rum, i en bestemt tid, i forhold til deres arbejde i GeoGebra. Her arbejdede de i høj grad ud fra den sene Wittgensteins teori omkring sprogspil og matematik (se afsnit 3.1.3.), hvor lærerne understøttede, at eleverne kunne få et indblik i, at matematiske argumenter og ræsonnementer skabes i rum og tid.

I de fælles opsamlinger tog lærerne udgangspunkt i de argumenter, som eleverne gav udtryk for i de pågældende opsamlinger. Her kunne der med fordel i højere grad have været arbejdet med at analysere elevbesvarelserne på en opgave, før der blev samlet op på opgaven, således at deres besvarelser var blevet brugt mere aktivt undervejs i forløbet.

*Eleverne*

Afprøvningerne er ikke blevet analyseret med elevernes indbyrdes samarbejdsrelationer for øje, fx om der er nogle, der taler meget eller andre, der ikke siger noget og lignende. Det var sjældent eleverne blev sat til at arbejde alene, når der var fokus på, at de skulle ræsonnere. Derfor er det også svært at vurdere, om det er mest hensigtsmæssigt eller ej, da der ikke er noget sammenligningsgrundlag. I afprøvning 2 syntes det at understøtte elevernes muligheder for at ræsonnere, at de både havde mulighed for at aflevere skriftlige og mundtlige besvarelser. Der er ikke inddraget skriftlige elevprodukter i den retrospektive analyse af afprøvning 1. Det skyldes bl.a., at eleverne ikke så ofte blev bedt om at aflevere skriftlige besvarelser, men umiddelbart synes det generelt også lidt sværere for dem end at arbejde mundtligt med opgaverne. Fælles for begge afprøvninger var, at det flere gange syntes som om, det understøttede elevernes muligheder for at ræsonnere, når de også arbejdede med deres egne håndtegninger. I afprøvning 1 kom det til udryk, når eleverne arbejdede med pind, snor og kridt i skolegården. I afprøvning 2 kom det til udtryk ved, at flere grupper og makkerpar tegnede illustrationer til Euklids fem forudsætninger, bog I, og til nogle af deres øvrige besvarelser. Det var også, selvom de ikke var blevet bedt om det. Ligesom de ikke blev præsenteret for illustrationerne i originalkilden, når de arbejdede med teksten. Der er en åben diskussion, hvorfor det mon forholdt sig sådan, eftersom jeg først for alvor blev opmærksom på det i den retrospektive analyse, og derfor ikke har sat eleverne i situationer, der var designet til at undersøge det. Det kan skyldes, at det sprogligt var svært for eleverne at formulere matematiske argumenter, derfor kunne illustrationer understøtte deres forklaringer. Det kan også skyldes, de arbejdede med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra, hvor GeoGebra gav mulighed for at understøtte eleverne undervejs med visualiseringer. Derfor brugte de muligvis også visualiseringer undervejs i deres skriftlige besvarelser. Det kan også skyldes noget helt tredje. Uanset hvad, det skyldes, synes elevernes egne håndtegninger at have været noget, der med fordel kunne være inddraget mere systematisk.

Papadopoulos (2014), som udførte et studie i en 6. klasse, fremhæver bl.a., at eleverne lærte om, hvordan bevisprocesser begynder, men de kunne ikke generalisere og færdiggøre beviser. Umiddelbart vurderes det i den retrospektive analyse, at eleverne godt kan generalisere og argumentere. Man kan også ane begyndende kæder af argumenter i nogle af elevernes besvarelser, men det synes svært for dem at færdiggøre dem og formulere beviser.

*Lærernes og opgavernes guidning*

Papadopoulos (2014), Caglayan (2016) samt Capone et al. (2019) beskriver lærerens rolle, som værende guidende, når udgangspunktet er at lade eleverne være nysgerrige og skabende. I den retrospektive analyse vurderes lærerne at være guidende og understøtte elevernes muligheder for at være nysgerrige og skabende. Lærerne understøtter elevernes muligheder for at bruge både den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Undervejs i den retrospektive analyse synes det mere og mere tydeligt, at læreren måske kunne have understøttet eleverne i at komme længere med deres ræsonnementer, hvis jeg i højere grad havde fokuseret på mulige strukturnet i forbindelse med både originalkilderne, brugen af GeoGebra og i samspillet herimellem. Det kunne både være bragt i spil i de møder, jeg havde med lærerne, lærerne kunne have bragt det i spil i klasseværelserne, men det kunne også højere grad have været bragt i spil i selve opgavedesignet. Det kunne både være bragt i spil i forhold til det faglige indhold i originalkilderne, men elevprodukterne kunne også løbende i langt højere grad være blevet analyseret med udgangspunkt i at se, hvilke strukturer, hvilke sammenhænge, de benyttede, således at disse kunne bringes aktivt i spil i de fælles opsamlinger og lærernes dialoger med eleverne undervejs i deres opgaveløsninger, men de kunne måske også bringes i spil i selve opgaverne og danne grundlag for forskellige differentieringsmuligheder. I forhold til afprøvning 1 kan et eksempel fx være, at nogle elever kunne arbejde videre med kvadratrødder i forhold til opgaven og andre kunne arbejde videre med en grundigere undersøgelse af vinklernes indbyrdes forhold i figuren. Et større fokus på at understøtte elevernes strukturopfattelse kunne måske også have udmøntet sig i, at elevernes egne formuleringer, ideer og ræsonnementer blev brugt mere systematisk som guidende eksempler, eleverne kunne lade sig inspirere af. Et makkerpar kunne have fået et eller flere andre makkerpars argumenter, som de skulle prøve at arbejde videre på. De kunne fx formulere og tilføje nye argumenter, hvis de syntes, der manglede nogle. De kunne have slettet argumenter, hvis de syntes, der var nogle som ikke holdt og selv argumentere for, hvorfor de mente det. I en planlægning af sådanne aktiviteter kunne man bl.a. lade sig inspirere af nogle af de delelementer Jankvist et al. (2019) refererer til i Aliberts (1988) "scientific debate".

*Opsamling*

De punkter, som kan tages med videre fra diskussionen af FS3, er:

1. Læreren italesætter, at der er fokus på at argumentere og ræsonnere, at det handler om at overbevise sig selv og andre samt at være nysgerrige og åbne over for andres argumenter.
2. Eleverne får mulighed for at give både mundtlige og skriftlige besvarelser. Det synes yderligere at være værdifuldt at lægge op til, at eleverne gør brug af egne håndtegninger.
3. Lærere og opgaver skal guide eleverne således, at de på den ene side understøttes i at være kreative og skabende og på den anden side i at udføre matematiske argumenter, ræsonnementer og beviser. Her kan et særligt fokus på strukturnet og strukturopfattelsen muligvis kvalificere lærerens muligheder for guidning. Det samme gælder i forhold til opgavedesign.

## 7.4. Didaktiske principper

Besvarelsen af ph.d.-afhandlingens overordnede problemstilling består som tidligere nævnt af tre forskellige, men sammenhængende bidrag:

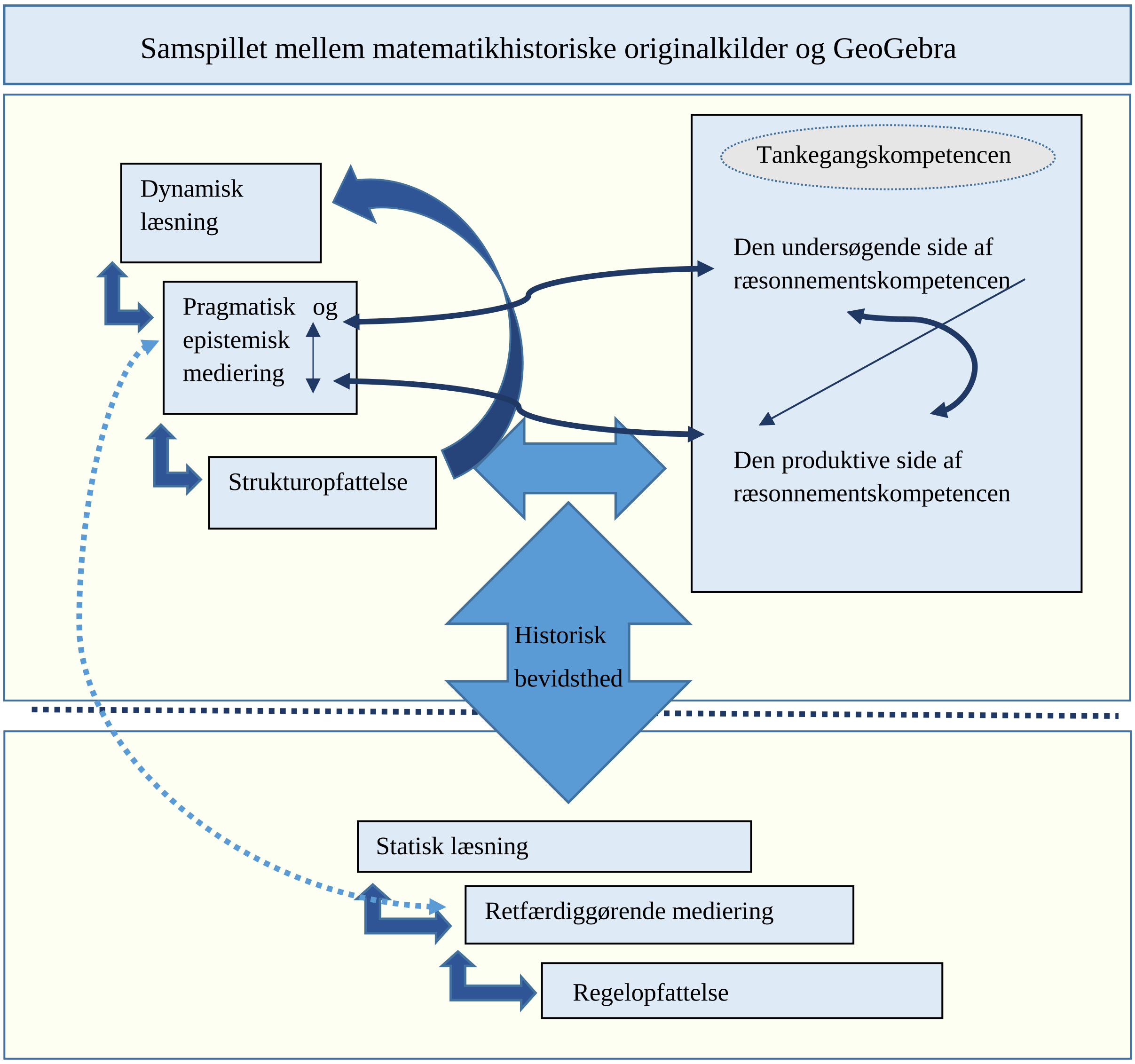
> Hvilke didaktiske principper kan understøtte, at elever får mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?

Formålet med ph.d.-afhandlingen er ikke at bidrage med et opgavedesign, der kan fungere som et læremiddel, men at bidrage med bagvedliggende didaktiske principper, hvorudfra forløb- og opgavedesign kan udspringe. I dette afsnit præsenteres det teoretiske bidrag først. Det er baggrunden for at udlede nogle mere konkrete didaktiske principper, der kan bruges af lærere, lærerteams, forløbs- og opgavedesignere samt forskere. På baggrund af det teoretiske bidrag, formuleres tilknyttede mål for en eventuel undervisning og disse forsøges yderligere omsat i spørgsmål, ideer og opmærksomheder, der kan bruges til at designe undervisningsforløb udfra. Formålet med de didaktiske principper er at understøtte læreres, opgave-og forløbsdesignere samt forskeres didaktiske refleksioner, således at de i højere grad kan skabe sammenhænge mellem valg af forskellige arbejdsformer og udformning af opgaver i forløb, der fokuserer på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

### 7.4.1. Projektets teoretiske bidrag

Nærværende ph.d.-afhandlings bidrag til forskningsfeltet mellem: 1) Matematikhistorie, herunder originalkilder, 2) digitale teknologier i matematikundervisning og 3) matematiske ræsonnementer, er en model, der viser hensigtsmæssige sammenhænge, hvorudfra der kan arbejdes med de fire teoretiske distinktioner og termen historisk bevidsthed. De fire teoretiske og analytiske distinktioner er: 1) Distinktionen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002), 2) Pragmatisk, retfærdiggørende og epistemisk mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018), 3) Statisk og dynamisk læsning (Mellin-Olsen, 1984) samt 4) Regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984).

Som tidligere beskrevet er udgangspunktet for at arbejde med teorier i DBR dobbelt. Før den retrospektive analyse var det meningen, at det teoretiske bidrag i sig selv skulle være at se, om de fire teoretiske distinktioner og betegnelsen historisk bevidsthed kunne kombineres på forskellig vis og bruges til både at planlægge og analysere ud fra. Det kunne de. Resultaterne i den retrospektive analyse pegede ydermere i retning af, at der var forskellige sammenhænge mellem de teoretiske distinktioner og termen historisk bevidsthed, der synes at gøre sig særligt gældende i analyserne af de forskellige cases og episoder (jf. afsnit 6.3). De sammenhænge er afsættet for modellen. Først præsenteres modellen i figur 26 og dernæst begrundes de forskellige sammenhænge.




*Figur 26: Model, projektets teoretiske bidrag – Hensigtsmæssige sammenhænge mellem de teoretiske og analytiske termer. De fire teoretiske og analytiske distinktioner, hvori termerne indgår i er: 1) Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002), 2) Pragmatisk, epistemisk og retfærdiggørende mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018), 3) Statisk og dynamisk læsning (Mellin-Olsen, 1984) samt 4) Regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984). Derudover indgår termen: Historisk bevidsthed (Jensen, 2011).*

Den øverste felt, hvori der står "Samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra", viser, at det er det overordnede samspil sammenhængene i modellen udspiller sig indenfor. De to lysegule baggrundsfelter viser, at der er en særlig sammenhæng mellem de teoretiske termer, der præsenteres i dem hverisær. En generel kommentar til modellen er, at der er mange forskellige former for dobbeltrettede pile. Fælles for disse er, at de udtrykker, der er et samspil mellem de felter, de går imellem. De fleste piles form og tykkelse har ikke som sådan nogen særskilt betydning. Det har en betydning om pilen er stiplet eller ej. Det vendes der tilbage til i forklaringerne og begrundelserne nedenunder. Den tykke dobbeltrettede vandrette pil viser, at det er samspillet mellem ræsonnementskompetencen og de øvrige teoretiske distinktioner i det øverste gule felt, der er i centrum for at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Den dobbeltrettede lodrette pil, hvori der står historisk bevidsthed forklares senere i teksten nedenfor.

*Dynamisk læsning*

Den dynamiske læsning har været et vigtigt udgangspunkt for at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Det gælder hhv. elevernes måde at læse originalkilden på og deres læsning af GeoGebra – både i forhold til at bruge knapperne og i forhold til at forstå og handle på den visuelle feedback, GeoGebra giver. Den dobbeltrettede pil til venstre i modellen mellem "Dynamisk læsning" og "Pragmatisk og epistemisk mediering" illustrerer, at elevernes arbejde med ræsonnementer i GeoGebra også er en slags dialogisk læsning af GeoGebra, som influerer på mulighederne for udfald af forskellige former for mediering, GeoGebra kan udgøre og vise versa.

*Pragmatisk og epistemisk mediering*

I forhold til den teoretiske afgrænsning i nærværende ph.d.-afhandling har netop medieringsperspektivet givet anledning til en fortløbende diskussion. Her har særligt de mere etablerede definitioner givet anledning til at diskutere betydningen af Misfeldt og Jankvists (2018) definitioner af medieringsformerne: pragmatisk, epistemisk og retfærdiggørende. Diskussionen heraf har særligt kredset omkring Misfeldt og Jankvists (2018) inspiration og adskillelse fra:

1. Artigues (2002) definitioner af epistemisk og pragmatisk værdi (som læner sig op ad Chevallards definition af praxeologier), hvor digitale teknologier kan have en epistemisk værdi, når elevernes arbejde hermed understøtter elevernes forståelse, og en pragmatisk værdi når det udgør et hurtigt og effektivt redskab for eleverne.
2. Trouches (2004; 2005) definitioner af, at skemaer (der læner sig op ad Piagets og Vergnauds definitioner heraf) kan have en pragmatisk (at gøre noget) og epistemisk funktion (at forstå noget).

Misfeldt og Jankvists (2018) medieringsformer knytter sig særligt til Harel og Sowders (2007) overbevisningsskemaer samt Hannas (1990) beskrivelse af beviser, der forklarer. På den baggrund kan Misfeldt og Jankvists (2018) medieringsformer siges at rette sig særskilt mod ræsonnementer. Derved adskiller Misfeldt og Jankvists (2018) brug af betegnelserne sig fra både Artigues (2002) og Trouches (2004; 2005) definitioner af epistemisk og pragmatisk.

Elevernes arbejde med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier synes at kunne lægge op til et konstruktivt samspil mellem en pragmatisk og epistemisk mediering. Det skyldes muligvis, at der i nærværende ph.d.-projekt er særligt fokus på geometriske beviser, som i høj grad kan siges at bygge på en visualisering. Denne visualisering er ofte i spil med tekstelementer fra originalkilderne, som udgør forskellige trin i en bevisførelse. Sidstnævnte gælder for de originalkilder, der har været en del af afprøvningerne. Det er selvfølgelig ikke givet, at det er tilfældet, blot fordi der inddrages originalkilder i forhold til elevernes arbejde med GeoGebra. Arzarello et al. (2007) skriver bl.a:

> While dragging, pupils who make constructions or explore geometric situations often switch back and forth from figures to concepts and an evolution of their attitudes from the empirical to the theoretical level can possibly be generated in the long run. (Arzarello et al., s. 306)

Denne vekselvirkning mellem det empiriske og det teoretiske niveau, synes ikke kun at gælde, når det handler om at gå fra figurer til begrebsforståelse (Arzerello et al., 2007), men synes altså også at kunne ligge implicit i vekselvirkningen mellem pragmatisk og epistemisk mediering. Det er illustreret i modellen med den dobbeltrettede pil mellem pragmatisk og epistemisk mediering.

*En fordel at udvide pragmatisk og epistemisk mediering med den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen*

KOM-rapportens definition af ræsonnementskompetencen er ikke som sådan en del af definitionen af pragmatisk og epistemisk mediering. Misfeldt og Jankvist (2018) bygger på Harel og Sowders (2007) teori om overbevisningsskemaer, hvori der også lægges vægt på, at arbejdet med at bevise handler om at overbevise sig selv og at overbevise andre. Det må altså formodes at ligge implicit i Misfeldt og Jankvists (2018) definitioner af medieringsformer, at der også her lægges vægt på at overbevise sig selv og overbevise andre. Det er en anden skelnen end KOM-rapportens skelnen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnements-kompetencen – begge sider af ræsonnementskompetencen kan være en del af hhv. at overbevise sig selv og at overbevise andre. På baggrund af de forskellige retrospektive analyser kan det diskuteres, om det ikke vil være en fordel at udvide definitionerne af hhv. epistemisk og pragmatisk mediering med også at fokusere på hhv. den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Forstået på den måde, at når man taler om epistemisk mediering, så er det vigtigt, at eleverne selv i forbindelse med arbejdet med geometriske beviser i GeoGebra, både kan forstå og følge argumenter og kæder heraf, men også selv kan producere kæder af argumenter, der har en mere generel og deduktiv karakter. Her får den hurtige visuelle feedback, GeoGebra kan give fx i form af dragging, en særlig betydning, når det kommer til den pragmatiske mediering, fordi dragging gør det muligt at tage udgangspunkt i et eksempel og gøre det til et nærmest uendeligt antal af eksempler, som kan danne baggrund for en generalisering. Derfor giver det også mening at tale om, at både den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen udgør en vigtig skelnen i forbindelse med at se på pragmatisk mediering. Harel og Sowder (2007) beskriver bevisets forskellige roller og refererer bl.a. det, deVilliers (1999)[31] kalder "intellectual challenge":

> *Intellectual challenge* refers to the mental state of self-realization and fulfillment one can derive from constructing a proof. As we mentioned earlier, this role does not corresponding to any of our proof schemes. (Harel & Sowder, 2007, s. 819)

Harel og Sowder (2007) slår fast, at "intellectual challenge" ikke korresponderer med nogle af deres overbevisningsskemaer. I lyset af nærværende ph.d.-projekt, hvor fokus er på at kvalificere arbejdet med beviser, når der arbejdes med digitale teknologier, fx GeoGebra, kan man sige, at netop denne intellektuelle udfordring, eller måske snarere fordring, ligger implicit i arbejdet med redskabet – i hvert fald, hvis der er tale om enten en pragmatisk eller epistemisk mediering. Det kan på sin vis siges at ligge implicit i den instrumentelle genese, hvor redskabet bliver til et personligt instrument (jf. kapitel 3). På den baggrund kan man hævde, at koblingen til bevidst at arbejde med den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen, både når det kommer til at overbevise sig selv og andre i forbindelse med en epistemisk og pragmatisk mediering, giver mening inden for den teoretiske sammensætning Misfeldt og Jankvist (2018) opstiller deres definitioner af de to medieringsformer ud fra. Det er illustreret i modellen ved de dobbeltrettede pile mellem feltet "Pragmatisk og epistemisk mediering" og "Den undersøgende side af ræsonnementskompetencen", hvor der ligeledes er en dobbeltrettet pil mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen samt fra "Den produktive side af ræsonnementskompetencen" til feltet "Pragmatisk og epistemisk mediering".

[31] deVilliers (1999) beskrivelse af bevisers roller bygger ifølge Harel og Sowder (2007) bl.a. på Hanna (1990), Balacheff (1988) og Bell (1976). De lyder således: "Verification, explanation, discovery, systematization, intellectual challenge, communication" (Harel & Soeder, 2007, s. 819)

Når det gælder om at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte mellemtrinselevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, synes det at være særligt værdifuldt, at de kan gå fra at bruge den undersøgende side i forhold til at forstå dele af originalkilden til den produktive side af ræsonnementskompetencen, hvor de selv producerer argumenter omkring de samme matematiske problemstillinger eller temaer, men med udgangspunkt i de muligheder GeoGebra giver. Det er illustreret ved den enkeltrettede pil fra den undersøgende side til den produktive side af ræsonnementskompetencen.

*Spændingsfeltet mellem ræsonnementskompetencen og tankegangskompetencen*

Det at sætte tankegangskompetencen i spil synes også at kvalificere arbejdet med ræsonnementskompetencen yderligere, eftersom arbejdet med tankegangskompetencen kan gå bag om arbejdet med ræsonnementskompetencen, når der arbejdes med samspillet mellem originalkilde og GeoGebra. Forstået på den måde, at arbejdet med tankegangskompetencen fx kan afstedkomme, at eleverne får mulighed for at arbejde med, hvad det er for typer af argumenter og beviser, der gælder for bevisførelsen eller argumentationsrækken i originalkilden. Det kan både skabe grobund for, at eleverne får en forståelse af mulighederne og begrænsningerne ved at arbejde med eksempler og generaliseringer i et dynamisk geometriprogram som GeoGebra (jf. case 2 episode 1) og give eleverne et blik for at diskutere argumenter og forsøge selv at producere kæder af argumenter (se også Thomsen & Jankvist, in press). I modellen er tankegangskompetencen illustreret ved det ovale felt, der har en anden farve i feltet med ræsonnementskompetencen. Spændingsfeltet mellem tankegangskompetencen og ræsonnementskompetencen er blevet berørt i dette projekt, men undervejs i projektet synes det tydeligt, at dette spændingsfelt kan noget særligt, når det kommer til at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

*Dynamisk læsning, medieringsformer og strukturopfattelse*

Det kan siges at være en central del af den epistemiske mediering, at eleverne arbejder med at producere kæder af argumenter, når de arbejder med GeoGebra. I den retrospektive analyse synes der at være et potentiale i, at både lærere og elever arbejder ud fra en strukturopfattelse med henblik på at understøtte eleverne i at kunne få blik for og formulere kæder af argumenter. Derfor er der også en forbindelse illustreret i modellen ved en dobbeltrettet pil mellem feltet "Strukturopfattelse" og "Pragmatisk og epistemisk mediering". Det synes også at være afgørende for lærerens dialoger med eleverne, at læreren arbejder ud fra en strukturopfattelse og på forhånd har tænkt på et muligt strukturnet i forhold til det matematiske indhold og de bevismåder, der er omdrejningspunktet i en specifik originalkilde samt hvad de kan give anledning til i samspillet med GeoGebra. Elevernes arbejde ud fra en strukturopfattelse og med at udvide deres egne strukturnet synes også at være en del af at skabe mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence og at skabe grobund for deres muligheder for at udøve en dynamisk læsning af både originalkilde og GeoGebra. Derfor er der en pil fra feltet "Strukturopfattelse" til "Dynamisk læsning". I den forbindelse er det vigtigt at minde om pilen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen og fra den produktive side af ræsonnementskompetencen tilbage til pragmatisk og epistemisk mediering samt samspillet herimellem. Den pil viser også, at elevernes egne producerede matematiske argumenter og ræsonnementer skal sættes i spil i hele denne sammenhæng mellem dynamisk læsning, medieringsformer og strukturopfattelse.

*Retfærdiggørende mediering*

Betegnelsen retfærdiggørende mediering (Misfeldt & Jankvist, 2018) henviser til, at de resultater computeren udfører, udgør beviset for eleverne, og at eleverne ikke stiller spørgsmål hertil, fordi de anser computeren for at være en autoritet. Dermed kan en retfærdiggørende mediering læne sig op ad det, Harel og Sowder (2007) kalder et eksternt overbevisningsskema. Inden for Misfeldt og Jankvists (2018) definition udgør computeren autoriteten[32]. Umiddelbart er den retfærdiggørende mediering ikke ønskværdig, når fokus er særskilt på, at eleverne skal udvikle deres ræsonnementskompetence, men det synes også som om, at elevernes arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra kan understøtte, at eleverne begynder at få blik for, når der finder en retfærdiggørende mediering sted. Det illustreres i modellen ved at pragmatisk og epistemisk mediering er samlet i et felt og retfærdiggørende mediering har fået sit eget felt. Når eleverne for blik for den retfærdiggørende mediering kan det resultere i, at eleverne mere bevidst søger at producere et argument, der forklarer, og at GeoGebra derfor kan ende med at udgøre en pragmatisk eller epistemisk mediering (jf. afsnit 6.2.2., sekvens 2). Samtidig kan eleverne også mens de arbejder med samspillet mellem originalkilde og GeoGebra gå fra at være i gang med noget, der synes som, at deres arbejde med GeoGebra udgør en pragmatisk og måske endda epistemisk mediering, slå over i noget der i stedet synes

[32] Det kalder Misfeldt og Jankvist (2018) et techno-autoritært bevisskema. Her synes arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra at have et særligt potentiale i forhold til at undgå og eller få øje på sådanne situationer (se fx Thomsen og Jankvist, 2020).

at være en retfærdiggørende mediering (jf. afsnit 6.2.2., sekvens 3). Når der er tale om at arbejde med et Geometriprogram kan den retfærdiggørende mediering være lidt sværere, fordi visualiseringen er der. Derfor kan en retfærdiggørende mediering ligge tæt op ad en pragmatisk mediering eller i andre situationer vise sig måske at blive til en epistemisk mediering. Det synes fx at være tilfældet i afsnit 6.1.2., sekvens 1 og 2. Det kan også komme til udtryk ved, at eleverne bruger knapperne i GeoGebra til at argumentere ud fra, hvilket kan risikere at udgøre en retfærdiggørende mediering, men have potentialer til at udgøre en epistemisk mediering – her synes lærerens rolle også at være central for at understøtte disse overgange fra retfærdiggørende mediering til de andre medieringsformer (se fx Thomsen & Jankvist, 2020). Det synes som om denne sammenhæng er der og kan blive endnu tydeligere, hvis der i højere grad fokuseres på at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres historiske bevidsthed. Derfor er den dobbeltrettede pil, der går direkte mellem felterne "Retfærdiggørende mediering" og "Pragmatisk og epistemisk mediering" stiplet.

*Den historiske bevidsthed*

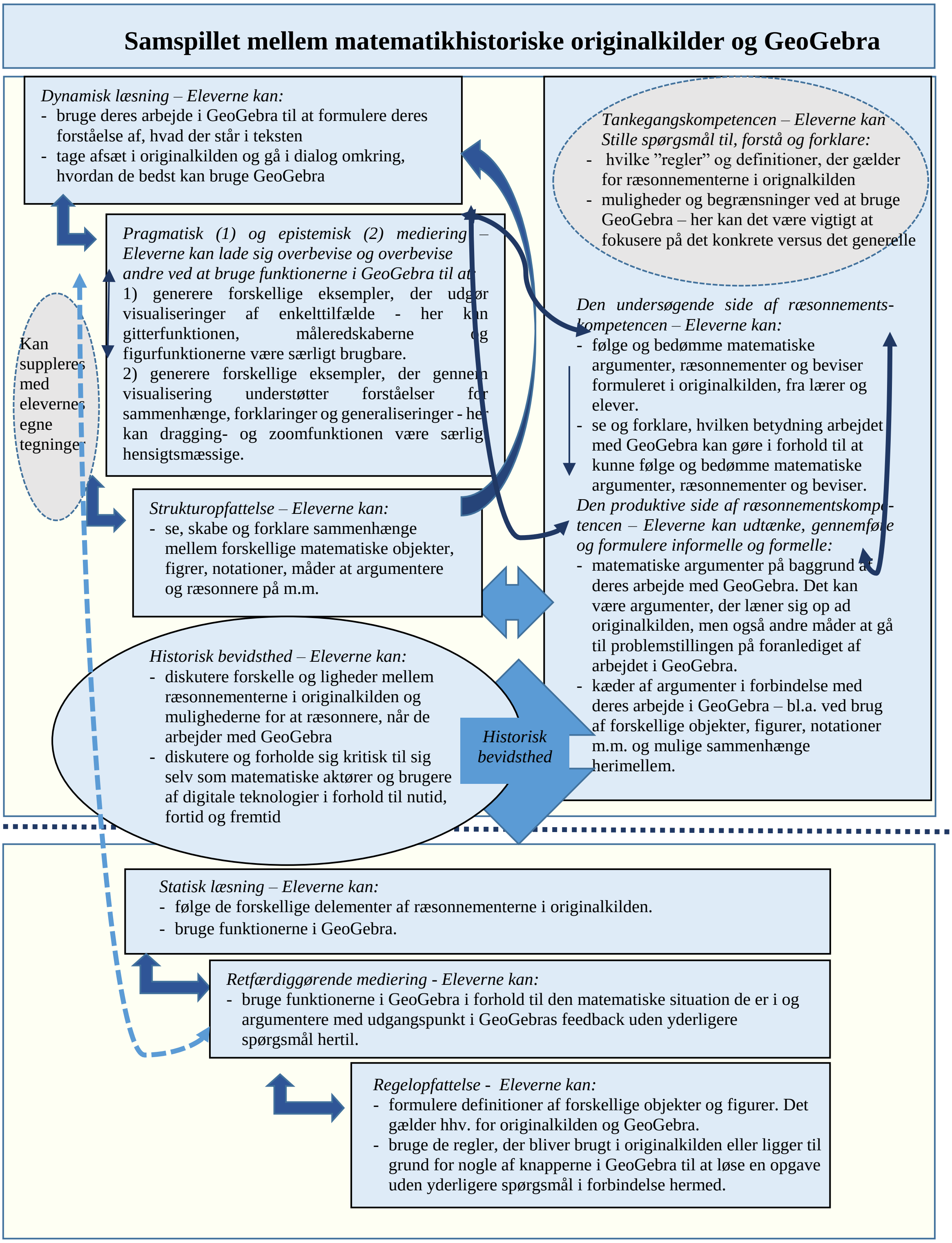
Som beskrevet i afsnit 7.1. ligger den historiske bevidsthed også implicit i at arbejde med dynamisk læsning, når der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Derfor bliver den historiske bevidsthed en implicit del af de øvrige sammenhænge, der er beskrevet i det øverste lysegule baggrundsfelt. I selve figuren er den historiske bevidsthed placeret i den lodrette dobbeltpil, der går på tværs af den stiplede vandrette linje gennem hele modellen. Den stiplede linje illustrerer, at der også er en overgang mellem at arbejde med forløb, der særskilt har fokus på at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med udgangspunkt i dynamisk læsning og en særlig vægt på den produktive side af ræsonnementskompetencen og så forløb, der ikke har dette fokus. Den historiske bevidsthed er placeret i den dobbeltrettede pil på tværs af den stiplede linje for at illustrere, at elevernes udvikling af historisk bevidsthed ikke er et mål i sig selv i dette ph.d.-projekt. Her er det et middel til, at eleverne bliver mere refleksive brugere af digitale teknologier i deres arbejde med at udvikle deres ræsonnementskompetence. Hvis der fokuseres endnu mere på, at eleverne ligefrem selv kan blive bevidste om, hvornår det er vigtigt at stoppe op, hvis den retfærdiggørende mediering ikke synes at være dækkende i forhold til den matematiske situation, de befinder sig i, kan det muligvis indeholde nye potentialer for yderligere udvikling af ræsonnementskompetencen. Situationer som sidstnævnte har udspillet sig undervejs i ph.d.-projektet og derfor er pilen, hvori der står historisk bevidsthed også dobbeltrettet.

*Statisk læsning, retfærdiggørende mediering og regelopfattelse i lyset af historisk bevidsthed*

Det under den stiplede linje på tværs af pilen "Historisk bevidsthed" har ikke været et mål i forbindelse med dette ph.d.-projekt. Men, man kan sagtens forestille sig forløb, der har fokus på en statisk læsning af en originalkilde, et matematisk bevis eller ræsonnement og af GeoGebra, hvor GeoGebra hovedsageligt udgør en retfærdiggørende mediering samt der bygges på en regelforståelse. Det kan i nogle henseender også være det mest hensigtsmæssige, fordi det er det mest hurtige og effektive. I sådanne forløb, er der ikke fokus på ræsonnementskompetencen, men at løse en opgave hurtigt og effektivt – måske kan man her sige, at elevernes arbejde kan have en epistemisk værdi ud fra Artigues (2002) definition heraf. Her kan det, at elever ind imellem har arbejdet med forløb, der har fokus at understøtte elevernes muligheder for at udvikle ræsonnementskompetence og historiske bevidsthed, forhåbentligt ruste eleverne til bedre at kunne håndtere matematiske situationer, der lægger op til en statisk læsning, en retfærdiggørende mediering og regelopfattelse. Her er det vigtigt at pointere, at det ikke inkluderer elevers arbejde med GeoGebra, hvor deres færdigheder er automatiserede, da det ikke ville resultere i, at GeoGebra udgør en retfærdiggørende mediering. Det kan være fx være modelleringsopgaver, hvor den bagvedliggende matematik er så kompleks, at den er svær at gennemskue, eller at eleverne hurtigt genkender en opgave og vælger et program, der kan løse den for dem hurtigt, således at de kan nå videre til andre opgaver. I sådanne forløb kan det, at eleverne har udviklet en historisk bevidsthed, der angår dem selv som brugere af digitale teknologier i matematiske situationer, forhåbentligt understøtte, at eleverne kan have et reflekteret blik på den retfærdiggørende mediering og stoppe op, hvis der er behov for det og trække på en de erfaringer, de har fra at arbejde med en dynamiske læsning m.m. og ræsonnementskompetencen. Det er altså illustreret i modellen ved, at historiske bevidsthed står i den dobbeltrettede sammenhængspil mellem de to forskellige baggrundsbokse.

### 7.4.2. Mål i forbindelse med det teoretiske bidrag

På baggrund af modellen i figur 26 karakteriseres de forskellige termer, som nøgletermer i de didaktiske principper. Nedenstående model er en formulering af målsætninger, der kan knyttes til de respektive termer. Der har ikke bevidst været arbejdet eksplicit med alle disse målsætninger i forløbet. Formuleringerne af mulige målsætninger har udviklet sig undervejs i forløbet, hvor udgangspunktet var figur 3 (jf. afsnit 2.7). På baggrund af mit arbejde med de foregående kapitler formuleres nedenstående mål til de enkelte nøgletermer.




*Figur 27: Model – Model fra figur 26 med målformuleringer til de forskellige teoretiske og analytiske termer.*

Tanken med modellen er ikke, at alle mål skal i spil inden for det samme forløb, da det formentligt vil blive for omfattende. Der kan fx fokuseres på udvalgte dele af modellen i et forløb og evt. have de andre i baghovedet undervejs. Umiddelbart synes det vigtigt, at eleverne præsenteres for, at det er ræsonnementskompetencen, der er særligt i fokus – og her skal den formulering, der bruges over for eleverne, selvfølgelig justeres i forhold til elevgruppen og evt. også i forhold til valget af originalkilde.

### 7.4.3. Spørgsmål og ideer til planlægning af forløb der fokuserer på samspillet

Årsagen til, at disse didaktiske principper formuleres som spørgsmål er, at det vurderes at skabe bedst mulige betingelser for, at lærere, lærerteams, opgave-og forløbsdesignere samt forskere får mulighed for at have ejerskab til måden, de vælger at arbejde med samspillet på. Ligesom det forhåbentligt også kan bidrage til, at der skabes mulighed for at omsætte spørgsmålene til konkrete didaktiske valg, der retter sig mod særlige elevgrupper på forskellige uddannelsestrin. Spørgsmålene kommer omkring de forskellige nøgletermer, men tager ikke som sådan afsæt i dem enkeltvis. Der kan altså forekomme spørgsmål, der går på tværs af nøgletermerne. Under nogle af spørgsmålene er der formuleret ideer til, hvordan arbejdet med spørgsmålene efterfølgende kan gribes an i et klasserum. Disse ideer og opmærksomheder er udsprunget af fundene i den retrospektive analyse, reviewet samt de foregående diskussioner. Nogle af dem er afprøvet, mens andre er fremkommet på baggrund af, at det viste sig, at det formentligt kunne have været en god ide at have inddraget dem, hvis endnu en iteration var mulig. Spørgsmålene tager ikke eksplicit udgangspunkt i de originalkilder, der har været omdrejningspunktet i denne ph.d.-afhandling. Det skyldes, at det vurderes, at nedenstående spørgsmål og ideer også kan bruges i forløb, der tager udgangspunkt i andre originalkilder.

| Samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra | |
|---|---|
| **Spørgsmål** | **Ideer/opmærksomhedspunkter** |
| Planlægningsfasen | |
| Hvilke typer argumentationsrækker er på spil i originalkilden? | |
| Hvilke bærende matematiske ideer er på spil i originalkilden og hvilket strukturnet giver samspillet med GeoGebra anledning til? Med strukturnet menes der de muligheder for sammenhænge med andre matematiske objekter, figurer, regler, formler m.m. | Brainstorm med udgangspunkt i, hvilke muligheder originalkilden lægger op til, GeoGebra lægger op til og dernæst hvad giver det af muligheder for samspillet. |
| Hvordan vil du/I understøtte, at eleverne kan arbejde med originalkilden? | Giv eleverne tid til at finde svære ord og sætninger og saml op på disse i fællesskab i klassen[33]. |
| Hvordan formulerer I spørgsmål/opgaver til eleverne, der fokuserer på, at eleverne får mulighed for at formulere deres egen forståelse af originalkilden? | Eleverne kan læse teksten i små bidder og lade dem arbejde undersøgende med GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes forståelse af det matematiske indhold, der er på spil i |

[33] Det er bl.a. inspireret af Olsen og Thomsen (2017)

| | |
|---|---|
| | originalkilden. Lige såvel som det kan være en god ide at bede eleverne om at formulere det, der står i teksten med deres egne ord[34].<br><br>Læreren læser op fra originalkilden og stopper op undervejs med oplæg til spørgsmål og diskussioner, eleverne kan arbejde ud fra. |
| Hvordan får du/I også fokus på den produktive side af ræsonnementskompetencen, således at eleverne får muligheder for at formulere deres egne argumenter og ræsonnementer i forbindelse med deres arbejde med GeoGebra? | Eleverne sættes i situationer, hvor de skal samarbejde, og de bliver eksplicit bedt om at formulere deres argumenter og ræsonnementer.<br><br>Eleverne formulerer argumenter i makkerpar og diskuterer disse med et andet makkerpar, som skal agere kritiske spørgere[35].<br><br>På baggrund af jeres indledende arbejde med strukturnettet kan der fx formuleres understøttende spørgsmål[36] til elevernes arbejde med originalkilden. Spørgsmålene kan justeres alt efter, hvordan eleverne matematisk griber arbejdet an. De kan bruges undervejs i dialoger med enkelt elever, grupper af elever og i fælles dialoger. Overvej om alle elever skal have spørgsmålene, eller om de skal udleveres undervejs, hvis de synes at kunne understøtte enkelte elever eller gruppers arbejde. |
| Hvis der er figurer i originalkilden, er det så hensigtsmæssigt at præsentere dem for eleverne – og i givet fald hvornår? | |
| Hvilke forskellige redskaber lægger kilden op til at bruge, og hvordan kan disse evt. bringes i spil i forløbet, således at eleverne bliver sat i forskellige matematiske situationer? | Her kan eleverne fx arbejde med pind, kridt og snor i skolegården og deres egne håndtegninger med papir og blyanter i samspillet med GeoGebra. |
| Hvordan vil du/I indsamle viden om, hvilke argumenter og ræsonnementer eleverne selv formulerer? | Her kan det være en ide at indsamle både skriftlige og mundtlige elevprodukter (fx i form af screencasts). |
| Overvejelser undervejs i forløbet | |
| Hvordan kan du/I italesætte, at der er fokus på ræsonnementer og forklare, hvad det betyder? | Brug evt. hverdagssammenligninger, som eleverne kan relatere til. Pointer, at det er vigtigt, at eleverne selv formulerer hypoteser, argumenter og kæder heraf. |
| Hvordan vil du/I udnytte det potentiale, at det er nyt og svært for alle? | Inddrag evt. din/jeres egen tvivl i forhold til forståelsen af originalkilden i ny og næ over for eleverne og åbn diskussioner af mulige forståelser med udgangspunkt heri. |
| Hvordan vil du/I sikre, at alle arbejder med den rigtige figur i GeoGebra? Her bliver det også vigtigt at være opmærksomme på punkterne i figuren, således at disse stemmer overens med dem i originalkilden. | Lad evt. eleverne tjekke hinandens figurer og punkterne herpå, så de passer med figurerne i originalkilden eller på tavlen/smart-boardet, inden eleverne går i gang med at arbejde med dem. |
| Hvordan kan du/I understøtte eleverne i at komme videre i de selvstændige arbejdssituationer, således at de bliver understøttet i at formulere matematiske argumenter og kæder heraf? | Det kan være vigtigt, at du/I kommer rundt til alle grupper – også til de grupper, der umiddelbart ser ud til at arbejde godt med opgaverne.<br><br>Det kan være en ide at gentage elevernes formuleringer og spørge videre derfra. Ligesom du/I kan inddrage eleverne og spørge undrende og sikre, at eleverne eksplicit opstiller hypoteser, forklarer hvorfor noget gælder eller ikke gælder og forsøger at formulere kæder af argumenter.<br><br>Skriv nogle af de væsentlige argumenter eleverne har haft i de forskellige grupper ned og lad de andre grupper få mulighed for at forholde sig hertil og evt. lade sig inspirere heraf. |
| Hvordan vil du/I sikre, at eleverne kan bidrage med matematiske pointer og argumenter i de fælles dialoger? | Inddrag forskellige diskussioner, du/I har haft med eleverne undervejs i deres selvstændige arbejde/gruppearbejde, evt. spørge til, hvordan de har forstået delelementer fra originalkilden og arbejdet med det i GeoGebra. |

[34] Disse ideer er bl.a. inspireret af Olsen & Thomsen (2017). Ligesom delementer også er inspireret af Barnett et al. (2014) samt Chrolay (2019).

[35] Det er bl.a. inspireret af Harel og Sowder (2007) samt Mason et al. (1982).

[36] Chorlay (2015) samt Jankvist og Geraniou (2019) kan være eksempler på, hvor man kan hente inspiration til at stille løbende spørgsmål til originalkilden. De synes dog ikke at tage udgangspunkt i et strukturnet og umiddelbart synes det også som om, at der lægges op til at hele elevgruppen arbejder med spørgmålene.

| | |
|---|---|
| | Vent evt. med nogle af de centrale opsamlinger på elevernes selvstændige arbejde til, du/I har haft mulighed for at se elevernes produkter. Således at de kan blive medinddraget i en fælles dialog. |
| Hvordan vil du sikre, at hverken originalkilden eller resultaterne i GeoGebra kommer til at fremstå som autoriteter i sig selv, som eleverne ikke spørger yderligere ind til, men blot tager for gode varer? | Tal eksplicit med eleverne om, at det er vigtigt at kunne overbevise sig selv og andre samt lytte og være parat til at lade sig overbevise af andre, hvis deres argumentation holder – ikke blot fordi de er en autoritet, eller en kammerat man evt. ser op til.<br><br>Her kan der bevidst også arbejdes med at sætte nogle benspænd ind i originalkilden undervejs[37]. |
| Analyser af elevprodukter undervejs | |
| Hvordan kan elevernes argumenter/besvarelser kategoriseres og placeres i forhold de strukturnet, du/I udarbejdede i planlægnings-fasen? Giver elevernes argumenter/besvarelser anledning til at udvide strukturnettet eller fokusere på særlige dele heraf? | Det kan muligvis også gøres i samarbejde med eleverne i undervisningen. |
| Hvilke særlige pointer fra elevernes argumenter vil du/I spørge videre ind til for at understøtte, at eleverne kan få blik for og formulere kæder af argumenter? | Det kan være en ide at kigge efter, om der er særlige argumenter, der fx kan bruges til at vise overgange fra mere uformelle argumenter og kæder heraf til mere formelle formuleringer af ræsonnementer. |
| Hvordan kan du/I bruge elevernes besvarelser/argumenter aktivt i den videre undervisning? | Skriv evt. forskellige af elevernes argumenter ned, således at de kan bruges til inspiration for enkelte elever eller elevgrupper. De kan evt. også bruges i forbindelse med opsamlinger eller introduktioner til nye opgaver/nye matematiske situationer.<br><br>Herudfra kan der i gennemførelsesfasen bl.a. udvælges eksempler på løsninger, formuleringer, tegninger mm., der arbejdes videre med i klassen[38]. |

*Figur 28: Skema – Spørgsmål, ideer og opmærksomheder, der kan knyttes til planlægning af forløb med fokus på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.*

Ovenstående spørgsmål, ideer og opmærksomheder er ikke tænkt som en tjekliste i forhold til at kaste sig ud i arbejdet med originalkilder og GeoGebra, men de kan bruges som en inspiration og som en refleksionsramme i forbindelse hermed. Alle spørgsmål behøver bestemt ikke at være i spil i alle forløb. Det kan også tænkes, at nogle forløb særligt fokuserer på nogle af spørgsmålene og andre på nogle andre spørgsmål. Alt efter hvilke originalkilder, der arbejdes med, hvor lange forløb, der arbejdes med osv.

## 7.5. Diskussion af DBR som metodologisk ramme

Med udgangspunkt i en diskussion af termerne “hypotetisk læringsspor” og “ontologisk innovation” indledes afsnittet med en diskussion af formerne på afhandlingens teoretiske og praksismæssige bidrag. Derefter diskuteres projektets argumenterende grammatik – dets validitet, reliabilitet og generalitet med udgangspunkt i de metodiske beslutninger, der er truffet undervejs i projektet.

[37] Det viste sig, at der var en fejl i navngivningen af en sidelængde i sætning 6, bog IV, i den udgave af Eibes oversættelse, vi arbejdede med i afprøvning 0 og 2. Chorlay (2015) giver et eksempel på, hvordan man som opgave-designer kan snige et lignende benspænd ind.

[38] Det er bl.a. inspireret af Drijvers et al. (2010).

Som beskrevet i kapitel 4, synes der blandt de udvalgte tekster, denne afhandlings metodekapitel baserer sig på, at være en uenighed om rækkevidden af hhv. det hypotetiske læringsspor og ontologisk innovation. Denne afhandling læner sig op ad diSessa og Cobbs (2004) definition af ontologisk innovation, som dækker fund af nye kategorier til at beskrive og analysere uddannelsesmæssige situationer ud fra samt at validere disse. En betegnelse, der har en mere teoretisk og analytisk karakter. I afhandlingen ses det hypotetiske læringsspor ikke som en teori, men som en term, der dækker en bevidst tilgang til at arbejde med spændingsfeltet mellem teori og praksis med henblik på at udforme afprøvninger, undervisnings- og lærings-forløb.

Modellen over de teoretiske sammenhænge i figur 26 vurderes at være et bidrag under kategorien ontologisk innovation. I dette tilfælde indbefatter det særligt to faktorer. Den ene er opdelingen mellem de teoretiske distinktioner og de nye sammenhænge, de forskellige termer sættes i med henblik på at understøtte mellemtrinselevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når der arbejdes med samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra. Den anden er forslaget til at udvide Misfeldt og Jankvists (2018) definitioner af hhv. epistemisk og pragmatisk mediering, således at de også indeholder distinktionen og sammenhængen mellem den undersøgende og produktive side af ræsonne-mentskompetencen, sådan som denne beskrives i KOM-projektet. En yderligere ting, der kan fremhæves er det potentiale, der synes at være i at arbejde med samspillet i forhold til at opdage, hvis GeoGebra udgør en retfærdiggørende mediering (se fx Thomsen & Jankvist, 2020). Dertil kommer, at der synes at være en særlig værdi i at lægge vægt på den produktive side af ræsonnementskompetencen. Det kan selvfølgelig diskuteres, hvilken tyngde et studie inden for rammerne af denne ph.d.-afhandling kan tillægges. Det vendes der tilbage til senere i dette afsnit.

Hvis blikket vendes mod at understøtte læreres, forløbs- og opgavedesignere samt forskeres arbejde med det hypotetiske læringsspor, vurderes det, at denne afhandling kan bidrage på to måder:

1. Modellen (figur 27) med overordnede målsætninger inden for de forskellige termer, der arbejdes med i denne afhandling. De kan ses som et overordnet udgangspunkt for at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.
2. Spørgsmålene, ideerne og opmærksomhederne til hhv. planlægningsfasen, overvejelserne undervejs i forløbet og analyser af elevprodukter undervejs (figur 28). De kan ses som et

afsæt til mere konkrete didaktiske overvejelser, der kan foretages i forbindelse med at arbejde med samspillet.

Der er ikke givet et helt nært bud på, hvordan der lige præcis kan arbejdes med samspillet mellem de originalkilder, der har været i spil i nærværende ph.d.-projekt og GeoGebra. Det skyldes, at ønsket har været at bidrage med noget, der kunne bruges mere generelt ind i forsknings- og undervisningsfeltet. Om end det også er vigtigt at påpege, at en planlægning af at arbejde med samspillet må tage sit konkrete udgangspunkt i den originalkilde, der vælges og de muligheder, der synes at være i forbindelse hermed.

Hvis der tages udgangspunkt i modellen i figur 26 synes der at være en sammenhæng mellem dynamisk læsning, pragmatisk og epistemisk mediering og strukturopfattelse, når målet er at skabe muligheder for, at eleverne kan udvikle deres ræsonnementskompetence. Her synes det yderligere værdifuldt, måske særligt når det gælder mellemtrinselever at tage udgangspunkt i elevernes egne argumenter og kæder heraf. Her synes det at se på de strukturnet, der kan være heromkring, at være afgørende for lærerens mulighed for at understøtte eleverne i at arbejde med den produktive side af ræsonnementskompetencen. Det er et fund, der bestemt kan diskuteres i forhold til nærværende ph.d.-afhandling, eftersom det er udtryk for en efterrationalisering i forbindelse med de afsluttende retrospektive analyser. Det leder over mod den anden del, dette projekt muligvis kan bidrage med i forhold til at understøtte arbejdet med at formulere hypotetiske læringsspor. Det synes værd at undersøge nærmere, hvordan man bevidst kan arbejde med strukturnet som omdrejningspunktet i planlægning, gennemførelse og analyser. Derudover kan der stilles spørgsmål til, om betegnelsen “hypotetiske læringsspor” i sig selv kan indeholde en begrænsning, hvis man gerne vil understøtte eleverne i at udvikle de produktive sider af de matematiske kompetencer. Måske kunne en betegnelse som “hypotetiske læringsstrukturer” være mere dækkende i disse tilfælde? Umiddelbart kan hypotetiske læringsspor måske i højere grad associere til en mere lineær progressionsforståelse end betegnelsen læringsstrukturer gør?

En del af den argumenterende grammatik i et DBR-studie er, at der kan redegøres for, at den udviklede praksis og teori er årsagen til evt. forbedringer. Som udgangspunkt var der i hhv. afprøvning 1 og 2 planlagt nogle før- og efter-situationer, der skulle vise, om der var tegn på, at eleverne havde udviklet deres ræsonnementskompetence undervejs i afprøvningerne og i givet fald, hvad disse tegn viste. Det viste sig midlertidigt, at disse situationer af forskellige årsager ikke var sammenlignelige, hvorfor de ikke er medtaget i de retrospektive analyser. Til gengæld synes det i de to cases at være tydeligt, at forløbene lægger op til, at eleverne benytter deres produktive side af ræsonnementskompetencen – og at det er svært for eleverne at udvikle kæder af ræsonnementer. Lige såvel som lærerens rolle og spørgsmål synes afgørende i den forbindelse og generelt i forhold til at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, når der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Forskningsspørgsmålene var som sådan heller ikke rettet mod at se en specifik fremgang, men mod hvordan der kan arbejdes med samspillet, så det understøtter elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Her synes det yderligere også meget væsentligt, at det tydeligt blev italesat i klasselokalerne, at der var fokus på ræsonnementskompetencen og at arbejdet med originalkilderne kunne understøtte det i elevernes arbejde med GeoGebra. På den baggrund synes fundene og både de teoretiske og mere praksisorienterede bidrag at være valide inden for projektets definerede rammer.

Når det kommer til studiets realibilitet er det i afhandlingen søgt at være transparent i forhold til forskellige metodiske overvejelser samt til og fravalg. Derudover er der også i databehandlingen søgt at arbejde ud fra et trianguleringsprincip. Forstået på den måde, at der har været inddraget forskellige former for data, fx screencast og elevernes skriftlige besvarelser. Når det så er sagt, er det svært at gisne om, hvorvidt nogle ting ville have faldet anderledes ud, hvis der var truffet andre valg. Dertil kommer at selve det, at det kunne have været værdifuldt at forberede afprøvningerne mere fokuseret med udgangspunkt i mulige strukturnet, først er trådt i forgrunden undervejs i den afsluttende retrospektive analyse. Derfor kan det ikke siges, om det vil kaste bedre resultater af sig med hensyn til at svare på forskningsspørgsmålene eller ej, hvis det var muligt at udføre endnu en iteration i ph.d.-projektet.

Afslutningsvist fremhæves det, at afprøvning 1 og 2 på mange måder kan karakteriseres som afprøvninger, hvorudfra der kan generaliseres. Det gør sig ikke gældende for afprøvning 0, hvorfor denne heller ikke er en særskilt del af de retrospektive analyser (jf. kapitel 4). Her bliver man dog nødt til at have det forhold in mente, at arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra bringer så mange nye ting i spil i de to afprøvningsklasser i afprøvning 1 og 2, at det formentligt i sig selv influerer på nogle af undervisnings- og læringssituationerne. Dette vil formentligt også kunne gøre sig gældende i andre mellemtrinsklasser, men det er i sig selv et forhold, som også må karakteriseres som en usikkerhedsfaktor. Lige såvel som selve det forhold, at der er tale om at deltage i et forskningsprojekt muligvis også har indflydelse på nogle af undervisningssituationerne. Disse usikkerhedsfaktorer vurderes dog ikke at have indflydelse på, hverken projektets teoretiske bidrag eller praksismæssige bidrag.

Derfor synes de også generaliserbare, men eftersom de ikke er afprøvet i sin helhed i praksis, kan omsætningsværdien til andre praksisser selvfølgelig diskuteres.

# 8. Konklusion

Denne afhandling skriver sig ind i spændingsfeltet mellem de tre forskningsområder: 1) Matematikkens historie, herunder brug af originalkilder, 2) Digitale teknologier i matematik-undervisning og 3) Matematiske ræsonnementer. Den metodologiske ramme omkring ph.d.-projektet er DBR. Målet med afhandlingen er at give et bud på nogle didaktiske principper, der kan kvalificere arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på mellemtrinnet med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnements-kompetence og historiske bevidsthed. De didaktiske principper bygger på arbejdet med tre forskningsspørgsmål. I forhold til FS1 blev det særligt klart, at der i afprøvningerne i ph.d.-projektet blev lagt stor vægt på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle deres produktive side af ræsonnementskompetencen, når de arbejdede med GeoGebra. Umiddelbart synes denne vægtning af den produktive side af ræsonnementskompetencen i forbindelse med at lade eleverne arbejde med at formulere beviser med udgangspunkt i deres arbejde med GeoGebra at adskille sig fra tidligere studier. Det syntes også som om, det var svært for eleverne at formulere og udvikle kæder af argumenter. Derfor er det vigtigt at være opmærksom på, hvor stor en rolle ræsonnementerne i originalkilden skal spille samt at finde den rette guidning i opgaveformuleringerne, der kan understøtte eleverne i selv at få ideer til, hvordan de kan argumentere med udgangspunkt i deres arbejde med GeoGebra samtidig med de understøttes i at formulere kæder af argumenter. Derudover bidrog besvarelsen af FS1 også til valget af de fire teoretiske distinktioner og termen historisk bevidsthed (Jensen, 2011), der har være omdrejningspunktet i nærværende ph.d.-afhandling. De fire teoretiske distinktioner er:

- Den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen (Niss & Jensen, 2002)
- Dynamisk og statisk læsning (Mellin-Olsen, 1984)
- Epistemisk, pragmatisk og retfærdiggørende mediering (Misfeldt og Jankvist, 2018)
- Regel- og strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984)

At arbejde med denne kombination af teoretiske distinktioner og termer synes også at være et bidrag ind i spændingsfeltet mellem de tre forskningsområder: 1) Matematikkens historie, herunder brug af originalkilder, 2) Digitale teknologier i matematikundervisning og 3) Matematiske ræsonnementer. Ligesom jeg heller ikke er stødt på kombinationen inden for enkelte af de tre forskningsområder.

FS2 er knyttet til en analyse af lærebogssystemet Kontext+. Nogle af de særlige opmærksom-hedspunkter, der udsprang af nogle af kritikpunkterne af lærebogssystemet var, at det skal være tydeligt for eleverne, at der er fokus på at argumentere og ræsonnere, at der skal være et begrænset antal opgaver, så eleverne har muligheder for at fordybe sig i arbejdet med dem. Der skal lægges op til, at eleverne kan reflektere over sig selv som matematiske aktører, der har redskaber som GeoGebra til rådighed. I forlængelse heraf kan nogle af inspirationspunkterne fra lærebogsanalysen siges at være, at opgaverne tilrettelæges, så de understøtter, at eleverne får blik for sammenhængen mellem de forskellige matematiske objekter og områder, der arbejdes med. Det skal dog også skærpes af, at der i højere grad lægges op til, at eleverne også understøttes i at få en forståelse af disse sammenhænge, så de kan bruge dem i deres ræsonnementer. Det kan være en ide at bruge hverdagsfortællinger i undervisningen, afhængigt af omfanget heraf og elevernes muligheder for at identificere sig hermed.

I besvarelsen af FS3 synes det tydeligt, at det er vigtigt, at lærerne eksplicit italesætter, at der i undervisningsforløbene er særligt fokus på at argumentere og ræsonnere og i den forbindelse vigtigt at være nysgerrige og åbne over for andres argumenter, at eleverne arbejder med både skriftlige og mundtlige besvarelser og ud over GeoGebra også opfordres til at tegne egne håndtegninger. Derudover kan det særligt fremhæves, at det er vigtigt, at både lærere og opgaver guider eleverne i en sådan grad, at de understøttes i at være skabende og kreative samtidig med, at de rent faktisk også understøttes i at kunne udføre ræsonnementer. Det synes som et fokus på strukturnet kan være værdifuldt i den forbindelse.

De didaktiske principper, der svarer på den overordnede problemstilling for hele afhandlingen er opdelt i et teoretisk bidrag og et praksismæssigt bidrag. Formålet med denne opdeling er bl.a., at de kan bruges af forskellige aktører, der ønsker at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence og historiske bevidsthed. Det kan være forskere, lærere, lærerteams eller opgave- og forløbsdesignere. De didaktiske principper skal ikke ses som universelt gyldige, men som et bud på nogle principper, der kan give anledning til at arbejde med vigtige opmærksomheder og refleksionsområder under arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra samt være inspiration til videreudvikling eller endsige nye udviklingsperspektiver.

Det teoretiske bidrag (figur 26) påpeger bl.a. nye muligheder for teoretisk sammenhænge og/eller udvidelser inden for de teoretiske distinktioner, der er udvalgt til netop denne afhandling. Her kan det fremhæves, at det synes værdifuldt at udvide Misfeldt og Jankvists (2018) definitioner af hhv. pragmatisk og epistemisk mediering, således at disse også indeholder distinktionen og sammenhængen mellem Niss og Jensens (2002) definition af den undersøgende og produktive side af ræsonnementskompetencen. Det synes ydermere at kunne være et selvstændigt bidrag også ind i spændingsfeltet mellem "kun" at arbejde med ræsonnementer, når der bruges digitale teknologier. Dertil kommer, at elevernes arbejde med samspillet mellem historiske originalkilder og GeoGebra, hvis der lægges op til en dynamisk læsning, kan understøtte, at eleverne får muligheder for at udvikle en historisk bevidsthed, der bl.a. kan resultere i, at eleverne selv får blik for, når der foregår retfærdiggørende mediering, således at de som elever også selv kan sætte spørgsmålstegn herved og dermed danne grundlag for at en mere pragmatisk og epistemisk mediering kan forekomme. Derudover er det igen værd at nævne, at strukturopfattelsen synes at kunne spille en overordentligt væsentlig rolle i arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle ræsonnementskompetencen, når de arbejder med GeoGebra.

Det praksismæssige bidrag i form af figur 27, hvor der er knyttet målsætninger til de forskellige teoretiske termer i det teoretiske bidrag, er tænkt som en mulighed for at inspirere forskellige aktører til at kunne formulere og sammensætte forskellige mål i forbindelse med arbejdet med samspillet afhængigt af, hvad de ønsker særligt at have fokus på. Dette bidrag er udviklet på baggrund af, at det som tidligere nævnt synes vigtigt, hvis hensigten er at understøtte eleverne i at udvikle deres ræsonnementskompetence, at det så også eksplicit italesættes over for dem, hvad det indebærer. Det er vigtigt, at eleverne bliver inddraget i, at der lægges op til, at de kan være eksperimenterende og nysgerrige i forhold til at læse originalkilderne og bruge GeoGebra, således at der skabes rum for, at de selv kan formulere matematiske argumenter og kæder heraf.

I den forbindelse er det også vigtigt at pointere, at læreren spiller en afgørende rolle for, at eleverne får ovenstående muligheder. Dertil kommer, at der er stor forskel på, hvordan de enkelte elever og elevgrupper kan understøttes i deres arbejde med at udvikle ræsonnementskompetencen og den historiske bevidsthed. Derfor er et grundigt forberedelses og analyse arbejde nødvendigt, både før og undervejs i forløb, der har fokus på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra. Her er tanken, at det praksismæssige bidrag i form af spørgsmål, ideer og opmærksomheder (figur 28) kan inspirere og understøtte et sådant arbejde.

Det synes ikke at være så udbredt inden for matematikdidaktisk forskning at fokusere på samspillet mellem originalkilder og GeoGebra – eller for den sags skyld andre digitale teknologier. Denne ph.d.-afhandling har bidraget med teoretisk og praksismæssig viden omkring ræsonnementskompetencen i den forbindelse. På baggrund af afhandlingens bidrag og den eksisterende forskning ser det ud som om, der også er et potentiale i forhold til at arbejde med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier med fokus på de syv andre matematiske kompetencer fra KOM-projektet (Niss & Jensen, 2002) eller kombinationer heraf.

## 9. Perspektivering

I nærværende ph.d.-afhandling har der været fokus på at skabe rum i undervisningen til, at eleverne fik muligheder for at formulere deres egne tolkninger, deres egne argumenter og eventuelle kæder heraf, samt at de var udgangspunktet for de dialoger, der udspandt sig undervejs i forløbene. Som nævnt flere gange synes det på baggrund af de retrospektive analyser at være en diskussion værdig, om der med fordel kunne have været arbejdet med en større grad af guidning i forhold til at understøtte elevernes muligheder for at fokusere på de bærende ideer i originalkilden samt at formulere matematiske argumenter og kæder heraf. Her synes to forskellige bud umiddelbart at være interessante at dykke mere ned i. Det ene kunne være, at der havde været lagt mere vægt på at analysere elevernes formuleringer og argumentationer undervejs imellem undervisningsgangene og have inddraget dem mere aktivt i klassedialogerne eller som bidrag i gruppernes selvstændige arbejde. Det andet kunne være, at der til de forskellige opgaver undervejs i forløbet var udformet forskellige grader af guidninger. Det kunne fx være i form af at starte på en argumentation, som eleverne kunne videreføre, der kunne være opgaver, hvor de skulle analysere, hvilke forskellige geometriske objekter og figurer, der indgik i originalkilden, før de skulle argumentere mm. Disse guidende opgaver kunne have forskellig karakter og blive givet til elevgrupperne, alt efter hvor de synes at have behov for guidning. Et andet interessant perspektiv i den forbindelse kunne være, om det fx ville være muligt, at eleverne i grupper i en klasse arbejdede med forskellige originalkilder i samspil med GeoGebra og i den forbindelse skulle fremlægge af flere omgange, én gang, hvor de med deres egne ord skulle fremlægge, hvad originalkilden gik ud på, den tid den var skrevet i mm. En anden gang kunne de fremlægge, hvordan de selv ville gennemføre beviser med udgangspunkt i deres arbejde med GeoGebra og på baggrund af alle fremlæggelser kunne de hver især arbejde på en tredje fremlæggelse, hvor de skulle beskrive forskelle og ligheder mellem at arbejde med ræsonnementer i forbindelse med originalkilden og det samme matematiske indhold i GeoGebra. I afsnit 3.2. udfordres KOM-rapporten. Forstået på den måde, at det måske ville være muligt at være mere ambitiøs, om man så kan sige i forhold til forventningerne med at arbejde med hhv. ræsonnementskompetencen og tankegangskompetencen i grundskolen og særligt fra mellemtrinnet og ned. På baggrund af denne afhandling synes denne udfordring stadig at være aktuel. Selvom det er svært, synes det muligt og fortsat relevant at undersøge og kvalificere, hvordan der i arbejdet med samspillet fx kan arbejdes med de bærende ideer i ræsonnementer, at kunne formulere kæder af matematiske argumenter samt at kunne omforme heuristiske ræsonnementer til gyldige beviser. Ligesom afhandlingen også gerne skulle vise, at det på mellemtrinnet kan give mening at arbejde med generalisering af matematiske resultater. På baggrund af dette studie, er det svært at vurdere, om det ville være muligt også at arbejde med nogle af de ovennævnte ting, men umiddelbart synes måden der blev arbejdet på i afprøvning 1 også at kunne tænkes ind i rammerne af indskolingsklasser. Her kunne man måske forestille sig, at der blev lagt mere vægt på fortællinger undervejs og så kun blev arbejdet med kortere brudstykker af originalkilden i samspillet med GeoGebra.

I flere af teksterne fra reviewet argumenteres der bl.a. for, at en af grundene til, det kan være svært at få matematikundervisere til at arbejde med matematikkens historie er, at der ikke er en direkte linje til prøver eller eksamener. I reveiwet blev der også refereret til Glaubitz (2010), der har vist, at studerende klarer sig bedre til de almindelige prøver, hvis de har arbejdet med matematikkens historie ud fra en hermeneutisk tilgang. I forlængelse af nærværende ph.d.-afhandling synes perspektivet også at være, at der ikke som sådan lægges op til, at der specifikt skal til at indarbejdes opgaver med matematikhistoriske originalkilder i forbindelse med fx Folkeskolens afsluttende prøver i matematik, men at arbejdet med samspillet forhåbentligt kan bidrage til, at elever bliver bedre rustet til at arbejde med ræsonnementer, når de bruger digitale teknologier. Fried (2001) opererer med et begreb, han kalder relevansproblemet, der netop omhandler, at undervisere skal kunne se meningen med at arbejde med matematikkens historie og ikke blive for presset af, at de også skal nå det øvrige pensum. Derfor foreslår Fried, at undervisere arbejder med matematikkens historie i de tilfælde, hvor det giver mening i forhold til det pensum, de arbejder ud fra. I en dansk skolekontekst, hvor Folkeskolens Formål, Formålet for faget matematik samt målmatricerne i Fælles Mål skal tænkes sammen, ligger arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra inden for rammen heraf. Der er sågar taget udgangspunkt heri i de enkelte afprøvninger. Det kan dog diskuteres, om det er hensigtsmæssigt at samle "Ræsonnement og tankegang" i én kompetence. I givet fald synes det vigtigt at være opmærksom på, hvornår den ene og den anden er på spil, således at de kan komplementere hinanden. Her synes arbejdet med originalkilder og GeoGebra at kunne understøtte en bevidsthed herom hos både lærere og elever (Thomsen & Jankvist, in press). I nærværende ph.d.-projekt har der været særligt fokus på mellemtrinnet, men det synes bestemt også at have potentiale i forhold til andre uddannelsestrin, som fx udskolingen og der ville som beskrevet ovenfor formentligt også kunne arbejdes med uddrag af originalkilder sat ind i mere fortællende rammer i indskolingen.

Det står helt klart efter arbejdet med den retrospektive analyse, at det kunne have været interessant at arbejde mere fokuseret på at skabe et strukturnet både i planlægningsfasen, men også i gennemførelses- og analysefasen. Her kunne det ydermere være interessant at undersøge i hvilken grad, det ville være muligt at inddrage eleverne i dette arbejde og om et strukturnet kunne udformes løbende undervejs i selve arbejdet med samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra samt hvordan dette kunne gøres hensigtsmæssigt.

I dette studie har der særligt været fokus på at understøtte elevernes muligheder for at udvikle ræsonnementskompetencen og derigennem deres historiske bevidsthed. Her kunne det være interessant at rykke ved det forhold, således at arbejdet med den historiske bevidsthed trådte mere i forgrunden. I den forbindelse ville det være hensigtsmæssigt også at inddrage et tværfagligt arbejde med andre af skolens fag. Hvilke fag, det ville være hensigtsmæssigt at inddrage, ville afhænge af de originalkilder, der ville danne udgangspunktet for et sådant forløb.

## Referencer


Aguilar, M. S., & Zavaleta, J. G. M. (2015). The difference as an analysis tool of the change of geometric magnitudes: the case of the cirkle. I E. Barbin, U. T. Jankvist, & T. H. Kjeldsen (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Seventh European Summer University* (pp. 391–399). Copenhagen: Danish School of Education.

Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, *8*(2), 31–35.

Andersen, K. (1986). Tredjegradsligninger i 1500-tallet. I K. Andersen (red.), *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*, Forlaget Trip.

Andersen, M.W., Dalsgaard, R.S., Hessing, S., & Lindhardt, B. (2015). *KonteXt+ 5, Matematik kernebog/web.* Alinea.

Andersen, M.W., Dalsgaard, R.S., & Lindhardt, B. (2016). *KonteXt+ 6, Matematik kernebog/web.* Alinea.

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 111–129. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9075-8

Arcavi, A., Bruckheimer, B., & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *3*(1), 30–37. https://www.jstor.org/stable/40247760

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Artigue, M. (2010). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. I C. Hoyles & J.-B. Lagrange (red.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain.* New ICMI Study Series (vol 13, pp. 463–475). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. I A. Olivier & K. Newstead (red.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 24 –31). Stellenbosch, South Africa: PME.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti. O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34*, 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Arzarello F., Olivero F., Paola D., Robutti O. (2007). The transition to formal proof in geometry. I P. Boero (red.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 305–323). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901691_018

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: the maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*, 225–253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Baki, A., & Guven, B. (2009). Khayyam with Cabri: Experiences of Pre-Service Mathematics Teachers with Khayyam's Solution of Cubic Equations in Dynamic Geometry

Environment. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 28*(1), 1–9. https://doi.org/10.1093/teamat/hrp001
Bakker, A. (2019). *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers*. Routledge, Taylor And Francis.
Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 149–168. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7099-8.
Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to design- based research with an example from statistics education. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. C. Presmeg (red.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples ofmethodology and methods* (pp. 429–466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16
Baldsløv, C. U. (2018). Den gensidige komplementaritet af Cas og originalkilder i matematikundervisningen. Master's thesis. Danish school of Education, Aarhus University.
Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554
Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 1–14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1
Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on teachers practice – the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Math, 59,* 235–268. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5889-z
Barnett, J. H., Lodder, J., & Pengelley, D. (2014). The pedagogy of primary historical Sources in mathematics: classroom practice Meets theoretical frameworks. *Science & Education, 23*(1), 7–28. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9618-1
Barnett, J. H., & Kjeldsen, T. H. (2016). Original Sources in the Mathematical Classroom. I L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (red.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 205–207). IREM de Montpellier
Bartolini-Bussi, M. G. (2000). Ancient instruments in the mathematics classroom. I J. Fauvel, & J. van Maanen (red.), *History in mathematics education: The ICMI Study*, New ICMI Study Series, (vol. 6, pp. 343–351). Dordrecht: Kluwer.
Bartolini-Bussi M. G., & Mariotti MA. (1999). Semiotic mediation: from history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, *19*(2), 27–35. https://www.jstor.org/stable/40248296
Bartolinni-Bussi, M. G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. I L. D. English , M. Bartolini Bussi , G. A. Jones , R. A. Lesh , B. Sriraman , & D. Tirosh (red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (pp. 746–783). Routledge / Taylor & Francis Group. https://doi.org/10.4324/9780203930236.ch28
Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 3–28.
Blomhoj, M. (2001). Hvorfor matematikundervisning? – matematik og almendannelse i et

hojteknologisk samfund. I M. Niss (red.), *Matematikken og Verden* (pp. 218–246). Fremad.

Bloor, D. (1983).Wittgenstein: *A social theory of knowledge.* Macmillan and Columbia University Press.

Bloor, D. (2002). *Wittgenstein, rules and institutions*. Routledge.

Boell, S. K., & Cecez-Kecmanovic, D. (2010) Literature reviews and the hermeneutic circle. *Australian Academic & Research Libraries*, *41*(2), 129–144. https://doi.org/10.1080/00048623.2010.10721450

Boell, S. K., & Cecez-Kecmanovic, D. (2014). A hermeneutic approach for conducting literature reviews and literature searches. *Communications of the Association for Information Systems*, *34*(1), 257–286. https://doi.org/10.17705/1CAIS.03412

Borwein, J. M. (2005). The experimental mathematician: the pleasure of discovery and the role of proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*, 75–108. https://doi.org/10.1007/s10758-005-5216-x

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Brown, A. L. (1982). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom setting. *Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141–178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2

Buchberger, B. (2002). Computer algebra: The end of mathematics? *ACM SIGSAM Bulletin, 36*(1), 3–9. https://doi.org/10.1145/565145.565147

Burke, M. J., & Burroughs, E. A. (2009). Using CAS to Solve Classical Mathematics Problems. *Mathematics Teacher, 102*(9), 672–679. https://doi.org/10.5951/MT.102.9.0672

Butterfield, H. (1931). *The whig interpretation of history*. G. Bell.

Børne- og undervisningsministeriet (2019a). *Matematik – Fælles Mål.* https://emu.dk/sites/default/files/202009/GSK_F%C3%A6llesM%C3%A5l_Matematik.pdf

Børne- og Undervisningsministeriet (2019b). *Matematik – Læseplan.* https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_L%C3%A6seplan_Matematik.pdf

Caballero-Gonzalez, C., & Bernal-Rodriguez, J. (2011). New Technologies and Education: Constructive, Geometric and Dynamic Introduction of the Derivative Concept. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 18*(4), 203–208. https://www.learntechlib.org/p/110976/

Caglayan, G. (2016). Exploring the lunes of Hippocrates in a dynamic geometry environment. *BSHM Bulletin, 31*(2), 144–153. https://doi.org/10.1080/17498430.2015.1122301

Can, C., Barnett, J. H. & Clark, K. (2018). Investigating Students' Meta-Level Object-Reflections and Discourse-Reflections: The Provocative Power of Primary Historical Sources. I A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, & S. Brown (red.), *21st Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1432 – 1437). San Diego, CA.

Capone, R., Del Sorbo, M. R., & Ninni, V. (2919). Using artifacts and dynamic geometry software in primary school inspired by Montessori method. I E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eight European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 81–90). METU.

Cèbe, S., & Goigoux, R. (2009). *Lector & Lectrix. Apprendre à comprendre les textes narratifs. CM1-CM2-6e-Segpa*. Retz. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00974777

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. In J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3–22, 41–56). La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2015) Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. I S. Cho (red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173–187). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Chorlay, R. (2015). Making (more) sense of the derivate by combining historical sources and ICT. I E. Barbin, U. T. Jankvist, & T. H. Kjeldsen (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Seventh European Summer University.* (pp. 485–498). Danish School of Education.

Chorlay, R. (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. I L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (red.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 5–23). IREM de Montpellier.

Chorlay, R. (2019). Why bother with original sources. I E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, and C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eight European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, (pp. 403–416). METU.

Clark, K. (2015). The comtribution of history of mathematics on students' mathematical thinking competency. I K, Krainer, & N. Vondrová (red.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1804–1810). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of Mathematics in Mathematics Education: Recent devlopments. I L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (red.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 135–179). IREM de Montpellier.

Cobb, P., Jackson, K., & Sharpe, C. D. (2017). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. I J. Cai (red.), *First compendium for research in mathematics education* (pp. 208–233). National Council of Teachers of Mathematics. https://doi.org/10.1080/10508400902797933

Cobb, P., McClain, K., Lamberg, T., & Dean, C. (2003). Situating teachers' instructional practices in the institutional setting of the school and district. *Educational Researcher*, *32*(6), 13–24. https://doi.org/10.3102/0013189X032006013

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. I T. Scanlon, & T. O'Shea (red.), *New directions in educational technology* (pp. 15–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-77750-9_2

Davis. P. J. (2004). A Letter to Christina of Denmark. *EMS*, 21–24.

Deligianidis, T, & Nikolantonakis, K. (2019). Developing geometric proportional thinking to 6th grade students with the use of a historical instrument of Erbard De Bar Le Duc. I E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, and C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eight European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, (pp. 303–314). METU.

Dennis, D., & Confrey, J. (1997). Drawing logarithmic curves with Geometer's SketchPad: A method inspired by historical sources. I J. King & D. Schattschneider (red.), *Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research* (pp.147–156). The Mathematical Association of America.

Descartes, R. (1637/1954). *The geometry of René Descartes.* Translated by D.E. Smith & M. L. Latham. Dover Publications.

Design-Based Research Collaborative. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational enquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5–8. https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

diSessa A.A. (1992) Images of Learning. I E. De Corte, M. C. Linn, H. Mandl., L. Verschaffel (red.), *Computer-Based Learning Environments and Problem Solving* (pp. 19–40). NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol 84. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-77228-3_2

diSessa, A. A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Educational Researcher, 32*(1), 77–103. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_4

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213–234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. I D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (red.), *The didactical challenge of symbolic calculators turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 174–196). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_8

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 85–109. https://doi.org/10.1023/A:1003660018579

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. I P. Boero (red.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 135–161). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901691_009

Ebert, J., Flusser, P., Kaplan, G., Kessler, R., & Sandifer, E. (2004). Geometric Proof. I V. Katz, & K. Dee Michalowicz, (red.), *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics.* Mathematical Association of America

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 105–121. https./doi.org/10.1207/S15327809JLS1101_4

Eibe, T. (1897a). *Euklids Elementer I-II*. [En dansk oversætte af Euklids Elementer, bog I og II]. Gyldendal.

Eibe, T. (1897b). *Euklids Elementer III-IV*. [En dansk oversætte af Euklids Elementer, bog III og IV]. Gyldendal.

Errard, J. (1594). *La géométrie et practiqve generalle d'icelle*. Auvray.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3–6. https://www.jstor.org/stable/40248010

Flyvbjerg, B. (2015). Fem misforståelser om casestudiet. I S. Brinkmann, & L. Tanggaard (red.), *Kvalitative metoder* (pp. 463–487). Hans Reitzels Forlag.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mahtematics coexist? *Science & Education*, *10*, 391–408. https://doi.org/10.1023/A:1011205014608

Fried, M.N. (2004). The problem of mathematics education and history of mathematics from a Saussurean point of view, talk given at *PME28*, Bergen University College, Norway.

Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 203–223. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9025-5

Fried, M. N. (2011). History of mathematics in mathematics education: Problems and Prospects. I E. Barbin, M. Kronfellner, & C. Tzanakis (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education – Proceedings of the 6th European Summer University* (pp. 13–26). Verlag Holzhausen GmbH.

Fried, M.N., & Unguru, S. (2001). *Apollonius of Perga's Conica: Text, Context, Subtext*. Brill, Leiden. https://doi.org.10.1163/9789004350991

Fried, M. N, Guillemette, D, Jahnke, H. N. (2016). Panel 1: Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. . I L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (red.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 211–230). IREM de Montpellier.

Fujita, T., Jones, K., & Miyazaki, M. (2011). Supporting students to overcome circular arguments in secondary school mathematics. I B. Ubuz (red.), *Proceedings of the 35th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 353–60). PME.

Furinghetti, F. (2002). *On the role of the history of mathematics in mathematics education*. [Conference presentation] 2nd international conference on the teaching of mathematics at the undergraduate level. Crete, Greece.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. I L. English (red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd Edition, pp. 626 – 655). Routledge, Taylor and Francis

Gissel, S. T., Kristensen, B. T., Hjemlmborg, M., & Larsen, D. M. (2019). Kompetencedækning i analoge matematiksystemer til mellemtrinnet. *Mona*, *3*, 7–27. https://tidsskrift.dk/mona/article/view/115580

Glaubitz, M. R. (2010). The use of original sources in the classroom. Emperical Research Findings. I E. Barbin, M. Kronfellner, & C. Tzanakis (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the Sixth European Summer University (ESU 6)* (pp. 351–361). Verlag Holzhausen GmbH Vienna, Austria.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research inMathematics Education*, *25*(5), 443–471. https://doi.org/10.2307/749485

Gulikers, I, & Blom. K (2001). A historical angle, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), pp. 223-258. https://doi.org/10.1023/A:1014539212782

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. I G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (red.), *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 45–51). CNRS.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange, *21*(1), 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F.K. Lester Jr, (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Information Age Publishing.

Hašek, R., & Zahradník, J. (2015). Study of Historical Geometric Problems by Means of CAS and DGS. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 22*(2), 53–58. https://www.learntechlib.org/p/175079/

Haspekian, M. (2005). An "Instrument Approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109–141.

Haspekian, M. (2014). Teachers' instrumental geneses when integrating spreadsheet software. I A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (red.), *The mathematics teacher in the digital area. Mathematics education in the digital era* (Vol. 2, pp. 241–275). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_11

Hoadley, C. P. (2002). Creating context: Design based research in creating and understanding CSCL. I G. Stahl (red.), *Proceedings of the conference on computer support for collaborative learning: Foundations for a CSCL community* (pp. 453–462). ISLS. https://doi.org/10.3115/1658616.1658679

Hong, Y., & Wang, X. (2015). Teaching the area of a circle from the perspective of HPM. I E. Barbin, U. T. Jankvist, & T. H. Kjeldsen (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Seventh European Summer University* (pp. 403-415). Danish School of Education.

Højsted, I. H. (2020). Guidelines for utilizing affordances of dynamic geometry environments to support development of reasoning competency. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *25*(2), 71–98.

Isoda, M. (1998). Developing the curriculum for curves using history and technology. I W.-C. Yang, K. Shirayanagi, S.-C. Chu, & G. Fitz-Gerald (red.), *Electronic Proceedings of the 3rd Asian Technology Conference in Mathematics.* https://atcm.mathandtech.org/EP/1998/ATCMP047/paper.pdf

Isoda, M. (2000a). Inquiring mathematics with history and software. I J. Fauvel, & J. van Maanen (red.), *History in Mathematics Education* (pp. 351–358). Kluver Academic Publishers

Isoda, M. (2000b). The Use of Technology in Teaching Mathematics with History - Teaching with modern techonology inspired by the history of mathematics. I W.-S. Horn & F.-L. Lin (red.), *Proceedings of the HPM 2000 Conference History in Mathematics Education Challenges for a new millennium* (pp. 27-34). Department of Mathematics National Taiwan Normal University.

Isoda, M. (2004). Why we use historical tools and computer software in mathematics education: mathematics activity as a human endeavor project for secondary school. I F.

Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (pp. 229-236). Uppsala University.
Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., Idrissi, A., da Silva, C. M. S., & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. I J. Fauvel, & J. van Maanen (red.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 291-328). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_9
Jankvist, U. T. (2007). Den matematikhistoriske dimension i undervisning – generelt set. *MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik*, (3).
Jankvist, U. T. (2008). Matematikopfattelser hos 2g'ere: fokus på de 'tre aspekter'. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *13*(2), 7–47.
Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in Mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 1*(3), 235–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9
Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational Studies in Mathematics, 74*(1), 53–74. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9227-8
Jankvist, U. T. (2011). Anchoring students' meta-perspective discussions of history in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, *42*(4), 346–385. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0346
Jankvist, U. T. (2013). History, Applications, and Philosophy in Mathematics Education: HAPh-A Use of Primary Sources. *Science & Education*, *22*(3), 635–656. https://doi.org/10.1007/s11191-012-9470-8
Jankvist, U. T. (2014). On the Use of Primary Sources in the Teaching and Learning of Mathematics. I M. R. Matthews (red.), *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching* (pp. 873–908). Springer Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7654-8_27
Jankvist, U. T., & Geraniou, E. (2019). ICT as a way of making original sources more accessible to students. I E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eight European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 107-130). METU.
Jankvist, U. T., & Geraniou, E. (2021). "Whiteboxing" the content of a formal mathematical text in a dynamic geometry environment. *Digital Experiences in Mathematics Education, 7*(3), 222–246. https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6
Jankvist, U. T., & Iversen, S. M. (2014). 'Whys' and 'hows' of using philosophy in mathematics education. *Science & Education*, *23*(1), 205–222. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9616-3
Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2011). New avenues for history in mathematics education – mathematical competencies and anchoring. *Science & Education*, *20*(9), 831–862. https://doi.org/10.1007/s11191-010-9315-2
Jankvist, U.T., & Misfeldt, M. (2019). CAS assisted proofs in upper secondary school mathematics textbooks. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *8*(3), 232–266. https://doi.org/10.17583/redimat.2019.3315
Jankvist, U. T., & Toldbod, B. (2007). The Hidden Mathematics of the Mars Exploration Rover Mission. *The mathematical intelligencer*, *29*, 8–15. https://doi.org/10.1007/BF02984753
Jankvist, U. T., Clark, K. M., & Mosvold, R. (2019a). Developing mathematical knowledge for teaching teachers: Potentials of history of mathematics in teacher educator

training. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 311–332 https://doi.org/10.1007/s10857-018-09424-x
Jankvist, U. T., Misfeldt, M., & Aguilar, M. S. (2019b). Tschirnhaus' transformation: mathematical proof, history and CAS. I E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, and C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eight European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, (pp. 319–330). METU.
Jankvist, U. T, Mosvold, R., & Clark, K. (2016). Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of history in mathematics education. I L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (red.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 441–452). IREM.
Jensen, B. E, (2011). At handle i tid og rum. Et socialkonstruktivistisk historiebegreb. *Historisk Tidsskrift*, *111*(1). https://tidsskrift.dk/historisktidsskrift/article/view/56499
Johansen, M. W., & Sørensen, H. K. (2014). *Invitation til matematikkens videnskabsteori*. Samfundslitteratur.
Jones, K. (2005). Research on the Use of Dynamic Geometry Software: implications for the classroom. I J. Edwards & D. Wright (red.), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom* (pp. 27-29). Association of Teachers of Mathematics.
Kántor, T, & Tóth, A. (2016). Teaching of old historical mathematics problems with ICT tools. *Teaching Mathematics and Computer Science 14*(1), 13–24 https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0400
Kidron, I. (2004). Polynomial approximation of functions: Historical perspective and new tools. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*(3), 299–331. https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000021793.71677.cd
Kidron, I. (2018). Polynomial interpolation of functions: Introducing Chebyshev polynomials in a CAS laboratory. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 25*(1), 27–34. http://dx.doi.org/10.1564/tme_v25.1.03
Kidron, I. (2001). Teaching Euler's algebraic methods in a calculus laboratory. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Conference*: *The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 2, pp. 368–375). University of Melbourne.
Kidron, I., & Tall, D. (2015). The Roles of Visualization and Symbolism in the Potential and Actual Infinity of the Limit Process. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 183–199. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9567-x
Kidron, I., & Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. *The International journal of computer algebra in mathematics education, 9*(3), 205–227.
Kidron, I., Zehavi, N., & Openhaim, E. (2001). Teaching the limit concept in a CAS environment: Students' dynamic perception and reasoning. I M. van den Heuvel-Panhuizen (red.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 241–248). Freudenthal Institute.
Kjeldsen, T. (2012). Uses of history for the learning of and about mathematics – Towards a general framework for integrating history of mathematics in mathematics education [Invited plenary paper]. *Proceedings of the 12th conference on History and Pedagogy of Mathematics, 1*, 1–21.

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327–349. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9352-z

Kjeldsen, T. H., Clark, K. M., & Jankvist, U. T. (in press). Developing historical awareness through the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. I: C. Michelsen, A. Beckmann, V. Freiman, U. T. Jankvist & A. Savard (red.), *15 Years of Mathematics Education and its Connections to the Arts and Sciences*. (pp. ….). Springer Nature Switzerland AG.

Kristensen, B. T. (2017). Nytårstanker i GeoGebra institutet. *Blog, Folkeskolen.dk*

Lijnse, P. L. (1995). “Developmental Research” as a way to an empirically based “didactical structure” of science. *Science Education*, *29*(2), 189–199. https://doi.org/10.1002/sce.3730790205

Lijnse, P. L., & Klaassen, K. (2004). Didactical structures as an outcome of research on teaching-learning sequences? *International Journal of Science Education, 26*(5), 537–554. https://doi.org/10.1080/09500690310001614753

Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students’ attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(2), 189–212. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9620-4.

Lindhardt, B., Dalsgaard, R.S., Poulsen, M., & Andersen, M.W. (2014). *KonteXt+ 4, Matematik kernebog/web.* Alinea.

Maffia, A. (2018). Exploiting the potential of primary historical sources in primary school: a focus on teacher’s actions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(30), 354 –368. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1506172

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163–185, https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

Mariotti, M. A. (2002). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257–281, *Kluwer Academic Publishers.* https://doi.org/10.1023/A:1013357611987

Mason, J. (1991). Questions about geometry. I D. Pimm & E. Love (red.), *Teaching and learning school mathematics: A reader* (pp. 77–90). Hodder and Stoughton.

Mason, J., & Waywood, A. (1996). The role of theory in mathematics education and research. I A. J. Bishop, Clements K., Keitel C., Kilpatrick J., Laborde C. (red.), *International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education* (vol 4, pp. 1055–1089). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_29

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. (2nd ed.). Pearson Education Limited

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære*. NKI-forlaget

Misfeldt, M. (2014). Trekantsberegninger og teknologi – et eksempel på hvordan teknologi har (eller bør have) indflydelse på udvikling af Matematikcurriculum. *MONA - Matematik-Og Naturfagsdidaktik*, (1). https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36192

Misfeldt, M., & Jankvist, U. T. (2018). Instrumental genesis and proof: Understanding the use of computer algebra systems in proofs in textbooks. I M. Tabach, H-S. Siller, L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, & C. Vale (red.), *Uses of technology in primary and secondary* *mathematics education: Tools, topics and trends* (pp. 375–385). Springer. ICME-13 Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educ Stud Math 72,* 199–218. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9188-y

Mogensen, A., Hesselholt, H. H., & Bull, A. (2016). CAS i folkeskolens matematikundervisning med øget læringsudbytte for drenge på mellemtrinnet. *Mona 1*, 9–20. https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36366

Monaghan, J. (2007). Computer Algebra, Instrumentation and the Anthropological Approach. *The International Journal for Technology in Mathematics Education. 14*(2), 63–71.

Nabb, K. (2010). CAS as a restructuring tool in mathematics education. I P. Bogacki (red.), *Electronic proceedings of the 22nd international conference on technology in collegiate mathematics* (pp. 247–259). http://archives.math.utk.edu/ICTCM/i/22/R007.html

Nagaoka, R., Barrow-Green, J., Bartolini Bussi, M. G., Isoda, M., van maanen, J., Dee Michalowich, K., & Van Brummelen, G. (2000). Non-standard media and other resources. I J. Fauvel, & J. v. Maanen (red.), *History in Mathematics Education* (pp. 329–370). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_10

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM*, *48*, 611–632. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3

Niss, M. A. (2007). Reflections on the State of and Trends in Research on Mathematics Teaching and Learning: From Here to Utopia. I F. K. Lester, Jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol 2, pp. 1293-1312). Information Age Publishing.

Niss, M., & Jensen, T. H. (red.). (2002). Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 223–239. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

Olivero, F. 2002. *Proving within dynamic geometry environments,* PhD. diss. Graduate School of Education, Bristol University.

Olsen, I., & Thomsen, M. (2017). *Matematikhistorie og it i matematikundervisningen i grundskolen*. [Upubliceret speciale]. Danish school of Education, Aarhus University.

Olsen, I. M., & Thomsen, M. (2018). Matematisk literacy og IT. I K. Friis, & D. Østergren-Olsen (red.), *Literacydidaktik i fagene – på mellemtrinnet* (pp. 71–82). Dafolo.

Papadopoulos, I. (2014): How Archimedes Helped Student to Unravel the Mystery of the Magical Number Pi. *Science & Education*, *23*(1), 61–77. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9643-0

Peters, R.S. (1980). *Uddannelsens filosofi – Udvalgte artikler*. Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck.

Plomp, T. (2007). Educational design research: An introduction. I N. Nieveen & T. Plomp (red.), *An introduction to educational design research* (pp. 9–35). SLO.

Poulsen, M. & Lindhart, B. (2018). *KonteXt+ – Træningshæfte/web 4.* Alinea

Radford, L. (2014). History of mathematics and mathematics education. I M. N. Fried, & T. Dreyfus (red.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*.

*Advances in Mathematics Education* (pp. 89 –109). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_7
Radford, L., Furinghetti, F., & Katz, V. (2007). Introduction The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 107–110. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9076-7
Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
Rabardel, P. & Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, *15(*5), 665–691.
Rangel-Nielsen, G. (oversætter) (1906). *Platons Menon.* Det philologisk-historiske samfund.
Retsinformation. Børne- og Undervisningsministeriet. LBK nr 1887 af 01/10/2021. *Bekendtgørelse af lov om folkeskolen*. https://www.retsinformation.dk/eli/lta/2021/1887
Saussure, F. (1974). *Cours de Linguistique G´en´erale*. I C. Bally and A. Sechehaye (red.) with the collaboration of A. Riedlinger, Payot, Paris.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.2307/1175860
Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivistic perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114–145. https://doi.org.10.2307/749205
Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. I G. Kaiser (red.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp 277-287). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_18
Siu, M.-K. (2000). The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom. I V. Katz (red.), *Using History to Teach Mathematics – An International Perspective* (pp. 3–9), No. 51 in MAA Notes. The Mathematical Association of America.
Siu, M.-K. (2006). No, I don’t use history of mathematics in my class: Why?. I F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (red.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4 – Revised edition* (pp. 268–277). University of Crete.
Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education.* Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3556-8
Skovsmose, O. (2006). Kritisk matematikundervisning – for fremtiden. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes? – om matematiklæring* (pp. 273–295). Malling Beck.
Skovsmose O., & Nielsen L. (1996). Critical Mathematics Education. I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (red.), *International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education* (vol 4, pp. 1257–1288). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_36
Skovsmose, O., & Ravn, O. (2011). *Matematikfilosofi*. Systime Academic.
Smestad, B. (2011a). History of mathematics in Norwegian for "grunnskolen". A literature review. . I E. Barbin, M. Kronfellner and C. Tzanakis (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education – Proceedings of the 6th European Summer University*. Verlag Holzhausen GmbH Vienna, Austria.

Smestad, B. (2011b). Teachers' Conceptions of History of Mathematics. I V. Katz, & C. Tzanakis Constantinos (red.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 231–240). The Mathematical Association of America.

Tall, D. (2000). Technology and versatile thinking in mathematical development. I M. O. J. Thomas (red.), *Proceedings of TIME 2000, an International Conference on the Technology in Mathematics Education* (pp. 33–50). The University of Auckland.

Tzanakis C., & Arcavi A. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. I J. Fauvel, & J. van Maanen (red.), *History in mathematics education: An ICMI study* (pp. 201 – 240). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

Thomsen, M. (2021a). Working with Euclid's geometry in GeoGebra. I Nortvedt, G.A., Buchholtz, N.F., Fauskanger, J., Hreinsdóttir, F., Hähkiöniemi, M., Jesse, B.E., Kurvits, J., Liljekvist, Y., Misfeldt, M., Naalsund, M., Nilsen, H.K., Pálsdóttir, G., Portaankorva-Koivisto, P., Radišić, J., and Werneberg, A. (red.), *Bringing Nordic mathematics education into the future. Papers from NORMA 20. Preceedings of the Ninth Nordic Conference on Mathematics Education* (pp. 257–264). SMDF.

Thomsen, M. (2021b, 18.-20. maj). *Using dynamic reading to support students' development of mathematical reasoning competency* [Abstract til konference]. NOFA8 – The 8th Nordic Conference on Subject Education (abstract, 20). https://www.hvl.no/globalassets/hvl-internett/arrangement/2021/nofa-8/abstractr-book---nofa8---acceptance-type-abstract-book-14.05.pdf

Thomsen, M., & Jankvist, U. T. (2020). Reasoning with digital technologies - counteracting students' techno-authoritarian proof Schemes. I A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, Z. Lavicza, R. Weinhandl, A. Clark-Wilson, and H.-G. Weigand. (red.), *PROCEEDINGS of the Tenth ERME TOPIC CONFERENCE (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA) 16-18 September 2020*. (pp. 483-490). Johannes Kepler University.

Thomsen, M., & Jankvist, U. T. (In press). Mathematical thinking in the interplay between historical original sources and GeoGebra. I U. T. Jankvist, A. Clark-Wilson, H.-G. Weigand, R. Elicer, & M. Thomsen (red.). *ICTMT-15 Book of accepted contributions: 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – Making and Strengthening "Connections and Connectivity" (C&C) for Teaching Mathematics with Technology* (pp. …). Danish School of Education.

Thomsen, M., & Olsen, I. M. (2019). Original sources, ICT and mathemacy. I U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME11, February 6-10, 2019) (pp. 2060–2061). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht university and ERME.

Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations. *Int J Comput Math Learning, 9*, 281. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. I D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (red.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 197–230). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_9

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristán, A. I. (2013). Technology driven developments and policy implications for mathematics education. I M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (red.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 753–789). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_24

Tzanakis C. & Arcavi A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. I J. Fauvel, & J. van Maanen (red.), *History in mathematics education: An ICMI study*. (pp. 201 – 240). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

Van den Akker, J. Gravemeijer, K. McKenney, S., & Nieven, N. (red.) (2006). *Educational design research*. Routledge.

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology ofEducation 10*(1), 77–101. https://doi.org/10.1007/BF03172796

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Wittmann, E. (1998). Mathematics education as a design science. I A. Sierpinska & J. Kilpatrick (red.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87–103). Kluwer.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458–477. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.4.0458

Zengin, Y. (2018): Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1–16. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education*. [Unpublished doctoral dissertation], University of Michigan, Ann Arbor.

Alineas onlineportal (gældende d. 04.01.22):

Alinea onlineportal: https://kontextplus.alinea.dk/course/QRAE-kontext-4

Hessing, S., Dalsgaard, R. S., Andersen, M. W., Poulsen, M., & Lindhart, B. Alinea onlineportal (+5): https://kontextplus.alinea.dk/course/QSSp-kontext-5

Hessing, S., Dalsgaard, R. S., Andersen, M. W., Poulsen, M., & Lindhart, B. Alinea onlineportal (+6): https://kontextplus.alinea.dk/course/QRAv-kontext-6

Poulsen, M., &Lindhart, B. Alinea onlineportal: https://kontextplus.alinea.dk/course/Q7Rg-kontext-4-traeningshaefte

## Bilag 1 – Spørgsmål til indledende fokusgruppeinterviews

Vi starter det her fokusgruppeinterview nu. Selv om man kalder det et interview, så prøver jeg at spørge så lidt som muligt, fordi jeg gerne vil have jer til at tale så meget som muligt. I må meget gerne alle sammen sige noget. I behøver ikke at tale efter tur, men husk at give hinanden plads til at tale. Det kan også godt være, at jeg ind imellem spørger enkelte af jer, så jeg sikrer, alle får mulighed for at sige noget – er det ok?

Det handler ikke om at svare rigtigt eller forkert, men om at I taler om jeres ideer, hvad I tænker undervejs og forklarer hvorfor, I mener ting osv.

Vi taler mest ud fra en side, hvor tegningerne er taget fra jeres matematikbog.

Jeg starter med at spørge jer lidt om, hvordan I har arbejdet med GeoGebra og hvad I synes, I har lært og man kan lære, når I arbejder med GeoGebra.

Spørgsmål GeoGebra:

Hvordan har I tidligere arbejdet med GeoGebra?

Hvad synes I, I lærte af det?

Hvad forestiller I jer, I kan lære, når I arbejder med GeoGebra?

Hvorfor?

Hvad kan I godt lide ved at arbejde med GeoGebra?

Hvad synes I er svært, når I arbejder med GeoGebra?

Har I prøvet at arbejde med det alene?

Har I prøvet at arbejde med det sammen?

Spørgsmål Kontext 5+(Andersen et al., 2015, s.):

Kan I tegne spejlene/figurerne i GeoGebra

Hvad kan I sige om dem?

Kan I finde på mere?

Hvordan?

Hvorfor?

## Bilag 2 – Spørgsmål til afsluttende fokusgruppeinterviews

Prøv at kigge på de her figurer, kan du/I tegne dem i GeoGebra? – fortæl hvad du gør undervejs.

Hvad kan du/I sige, om figurerne?

Hvad kan du/I huske, I har arbejdet med i forhold til figurer og geometri i det her forløb med Sokrates og Menon?

Er der noget af det, du/I kan bruge, hvis du/I skal sige noget om figurerne?

Det må være alt muligt, noget om deres former, deres vinkler, om de kan laves om til andre figurer og andet.

Hvorfor mener du/I, det må være sådan?

Hvordan synes du/I, det har været at arbejde med sådan et forløb, hvor der både har været en gammel tekst og så arbejdet med GeoGebra?

Hvad synes du/I, du/I har lært?

Hvis du/I skulle give mig nogle gode råd, hvis jeg skal arbejde videre med de her forløb med gamle tekster og GeoGebra – hvad skulle de så være?

## Bilag 3 – Indledende spørgsmål omkring argumentationer og beviser

Hvad synes du kendetegner en matematisk argumentation?

Hvad synes du kendetegner et matematisk bevis?

Adskiller et matematisk bevis sig fra andre typer beviser, du kender? Forklar hvordan og hvorfor/hvorfor ikke?

## Bilag 4 – Indledende spørgsmål til at arbejde med GeoGebra

Hvordan har I tidligere arbejdet med GeoGebra?

Hvad synes I, I lærte af det?

Hvad forestiller I jer, I kan lære, når I arbejder med GeoGebra?

Hvorfor?

Hvad kan I godt lide ved at arbejde med GeoGebra?

Hvad synes I er svært, når I arbejder med GeoGebra?

Har I prøvet at arbejde med det alene?

Har I prøvet at arbejde med det sammen?

## Bilag 5 – Spørgsmål på logbogssider

1. **Logbogsside**

Hvad har vi arbejdet med denne uge?

Hvad har du lært?

Hvad synes du om at arbejde på denne måde? Forklar hvorfor

**2. logbogsside**

Hvad har vi arbejdet med denne uge?

Hvad har du lært?

Hvad synes du om at arbejde på denne måde? Forklar hvorfor

Er der noget, du har syntes var særligt svært eller let?

Hvad vil du særligt gerne blive bedre til?

### 3. logbogsside

Hvad har vi arbejdet med denne uge?

Hvad har du lært?

Er der noget, du synes var særligt svært eller let?

Hvad synes du har været det vigtigste ved det her forløb?

Hvad har været det mindst vigtige?

Hvordan tror du, du fremover kan bruge det, du har lært?